МАГНЕТНО ПОЉЕ

-ПРЕГЛЕД ОСНОВНИХ ФОРМУЛА-

1) СИЛА КОЈА ДЕЛУЈЕ НА СТРУЈНИ ЕЛЕМЕНТ $i d\vec{l}$ У МП

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

2) СИЛА КОЈА ДЕЛУЈЕ НА ДЕО ПРОВОДНИКА ДУЖИНЕ l

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$$

3) ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИЈЕ (АКО ВИШЕ СТРУЈНИХ КОНТУРА У ЈЕДНОЈ ТАЧКИ ДАЈУ МАГНЕТНЕ ИНДУКЦИЈЕ $\vec{B}_1, \dots, \vec{B}_k$ ТАДА ЈЕ УКУПНА МАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА У ТОЈ ТАЧКИ $= \sum_k \vec{B}_k$)

$$\vec{B} = \sum_k \vec{B}_k$$

4) ЛАПЛАСОВ ЗАКОН (МАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА ОКО СТРУЈНОГ ЕЛЕМЕНТА $i d\vec{l}$)

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{m}$ МАГНЕТНА ПЕРМЕАБИЛНОСТ

5) ИНТЕНЗИТЕТ СИЛЕ ПРИВЛАЧЕЊА/ОДБИЈАЊА ДВА ПАРАЛЕЛНА СТРУЈНА ЕЛЕМЕНТА

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_1 dl_1 \cdot i_2 dl_2}{r_{12}^2}$$

6) ТЕОРЕМА О МАГНЕТНОМ НАПОНУ

$$\oint H_s ds = i$$

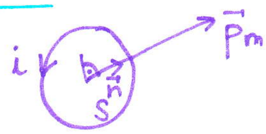
7) МАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА У ТОРУСНОМ НАМОТАЈУ

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2r\pi}$$

N - број намотаја у торусу ; i - јачина струје

8) МАГНЕТНИ МОМЕНТ СТРУЈНЕ КОНТУРЕ

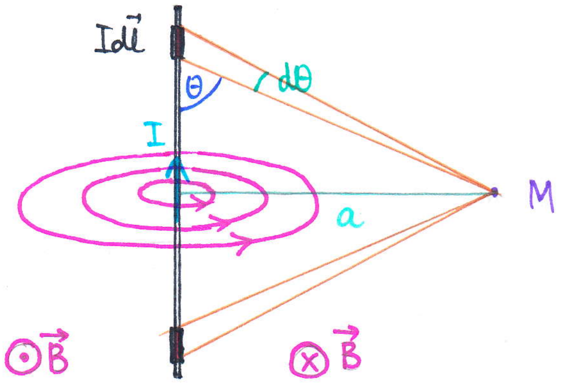
$$\vec{p}_m = i S \vec{n}$$



9) МАГНЕТНИ ФЛУКС

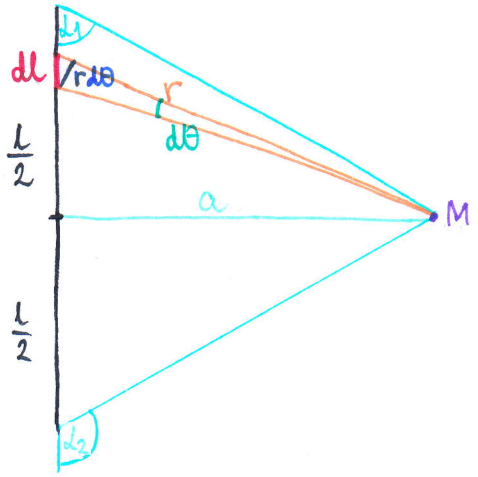
$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B_n dS$$

46. Одредити вектор магнетне индукције у околини неког правог проводника коначне дужине којим тече струја задате јачине.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl\, r \sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl}{r^2} \sin\theta$$



$$\sin\theta = \frac{r\, d\theta}{I\, dl}$$

$$I\, dl = \frac{r\, d\theta}{\sin\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{a}{r} \qquad r = \frac{a}{\sin\theta}$$

$$B = \int dB$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\frac{r\, d\theta}{\sin\theta}}{r^2} \sin\theta =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\theta}{r} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\sin\theta\, d\theta}{a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\theta\, d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cos\theta \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}$$

АКО ЈЕ ТАЧКА M НА СИМЕТРАЛИ ПРОВОДНИКА $\Rightarrow$ $\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\, 2\cos\alpha_1$$

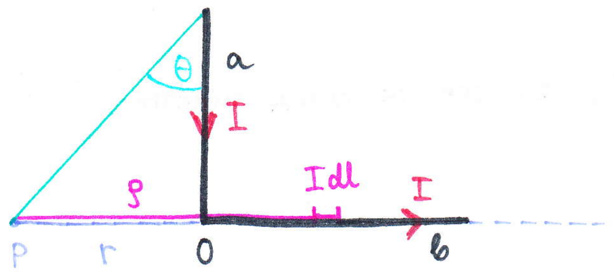
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\cos\alpha_1}$$

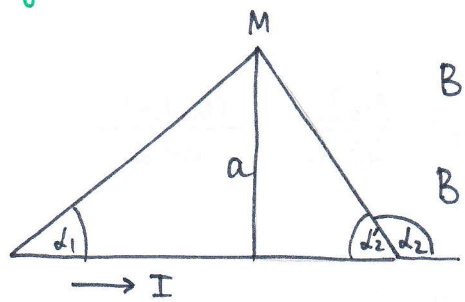
ЗА БЕСКОНАЧНИ ПРОВОДНИК $\alpha_1 \to 0$ $\alpha_2 \to 180^\circ$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\underbrace{\left(\underbrace{\cos 0}_{=1} - \underbrace{\cos 180^\circ}_{=-1}\right)}_{=2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\vec{e_\varphi}}$$

47. Дуж дугог и танког проводника који је савијен под правим углом тече струја I. Одредити вектор магнетне индукције $\vec{B}$ у тачки P која је на растојању r од темена O, на продужетку странице проводника.





$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2'\right)$$

$$\vec{B}_{(P)} = \vec{B}^{(a)}_{(P)} + \vec{B}^{(b)}_{(P)}$$

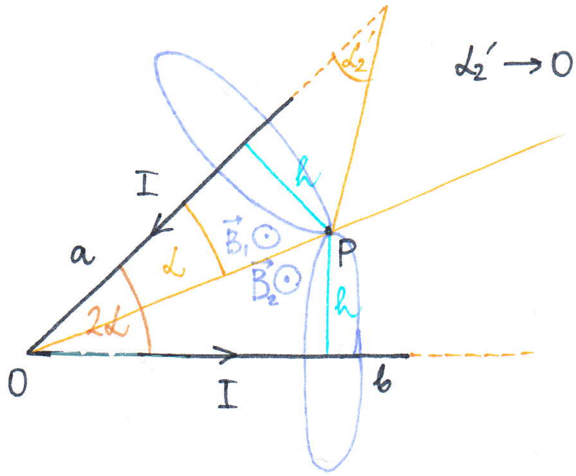
$$\vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel$$

$$\vec{B}_\parallel = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,\vec{dl}\times\vec{\rho}}{\rho^3} \qquad I\,\vec{dl} \parallel \vec{\rho} \Rightarrow I\,\vec{dl}\times\vec{\rho} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B}_\parallel = \vec{0}$$

$$B_\perp = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2'\right) \qquad \alpha_1 = \theta,\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2},\ a \equiv r$$

$$\boxed{B_\perp = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\cos\theta} \qquad \theta \to 0 \Rightarrow B_\perp = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$ (БЕСКОНАЧНО ДУГ ПРОВОДНИК)

48. Струја јачине I тече врло дугим танким проводником који је савијен тако да његови краци заклапају угао од 2α. Одредити магнетну индукцију у тачки P која се налази на симетрали угла и на растојању x од центра.



$\alpha_2' \to 0$ (ПРОВОДНИК ЈЕ ВРЛО ДУГ)

(Oa):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2')$$ (ИЗ 46. ЗАДАТКА)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi h}(\cos\alpha + \cos 0) =$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\sin\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi x \sin\alpha}(\cos\alpha + 1)$$

(Ob):

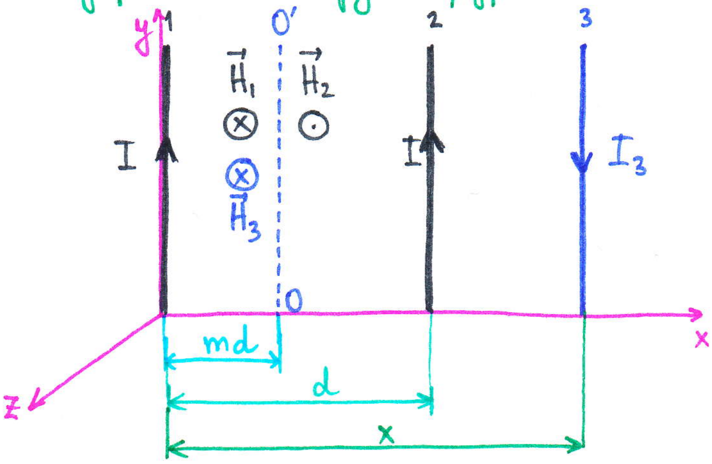
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\,\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}$$ ($B_2 = B_1$ ЈЕР ЈЕ СЛИКА СИМЕТРИЧНА)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ \vec{B}_1 \parallel \vec{B}_2\end{array}\right\} \Rightarrow B = B_1 + B_2 = 2B_1$$

$$B = 2\frac{\mu_0 I}{4\pi x}\,\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\,\frac{\cos\alpha + 1}{\sin\alpha}}$$

49. Два врло дуга, права, танка проводника постављена су међусобно паралелно на растојању d. Кроз оба проводника тече струја исте јачине I, у истом смеру. Где треба поставити трећи проводник истих карактеристика, у равни коју чине претходна два проводника, да би линија нултог МП била између прва два проводника, на растојању md $(0<m<1)$ од првог проводника? Узети да кроз трећи проводник протиче струја $I_3 = kI$ $(k>1)$ у смеру супротном смеру струје I.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R\pi}\vec{e}_z$$ ВЕК. МАГН. ИНД. ∞ ДУГОГ ПРОВОДНИКА

У СВИМ ТАЧКАМА ЛИНИЈЕ НУЛТОГ МП $\vec{B}$ ЈЕ ПРЕМА ПРИНЦИПУ СУПЕРПОЗИЦИЈЕ:

$$\left.\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 + \vec{H}_3$$

$$H = -H_1 + H_2 - H_3$$

НА ЛИНИЈИ $O'O$ $\quad H = 0$ $\quad$ (ЛИНИЈА НУЛТОГ МП)

ТЕОРЕМА О МАГНЕТНОМ НАПОНУ: $\oint H_s ds = i$; $HS = I \Rightarrow H = \frac{I}{S}$

$$H_1 = \frac{I}{2\pi md}$$

$$H_2 = \frac{I}{2\pi(d-md)}$$

$$H_3 = \frac{I_3}{2\pi(x-md)} = \frac{kI}{2\pi(x-md)}$$

$$H = -\frac{I}{2\pi md} + \frac{I}{2\pi(d-md)} - \frac{kI}{2\pi(x-md)} = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{2\pi}{I}$$

$$-\frac{1}{md} + \frac{1}{d-md} - \frac{k}{x-md} = 0$$

$$\frac{-d+md+md}{md(d-md)} - \frac{k}{x-md} = 0$$

$$\frac{d(2m-1)}{md^2(1-m)} = \frac{k}{x-md}$$

$$(2m-1)(x-md) = kmd(1-m)$$

$$2mx - 2m^2d - x + md = kmd(1-m)$$

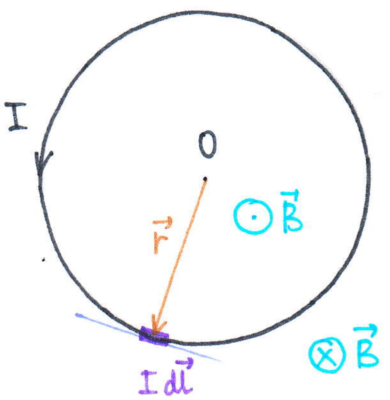
$$x(2m-1) - md(2m-1) = kmd(1-m)$$

$$x(2m-1) = kmd(1-m) + md(2m-1)$$

$$x = \frac{md(k(1-m)+2m-1)}{2m-1}$$

$$\boxed{x = md\left(\frac{k(1-m)}{2m-1} + 1\right)}$$

50. Наћи магнетну индукцију у центру круга полупречника r, ако по обиму тече струја јачине I.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, dl\, r \sin\theta}{r^3}$$

$$\theta = \sphericalangle\left(I d\vec{l}, \vec{r}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,dl}{r^2}$$

$$B = \int dB =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \int_0^{2r\pi} dl =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} 2r\pi$$

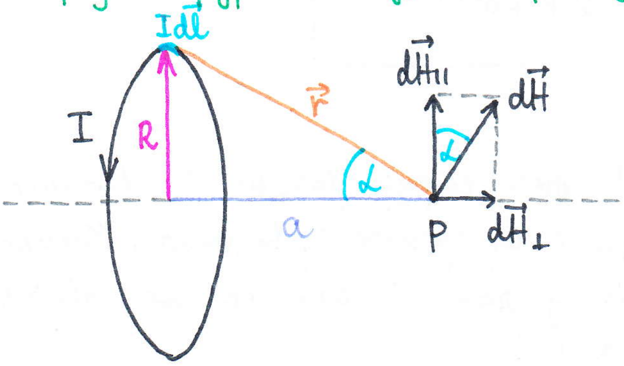
2

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2r}}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \Rightarrow \boxed{H = \frac{I}{2r}}$$

ЈАЧИНА МП У ЦЕНТРУ КРУЖНОГ ПРОВОДНИКА

51. Проводник је савијен у облику круга полупречника R. Кроз проводник протиче струја I. Одредити вектор јачине МП у тачки P која лежи на оси симетрије струјне контуре на растојању a од центра



ПАРАЛЕЛНЕ КОМПОНЕНТЕ СЕ ПОНИШТАВАЈУ

$$d\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \frac{I\,\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I\,dl\,r \sin\Theta}{r^3}$$

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{I\,dl}{r^2} \sin\Theta$$

$$\vec{r} \perp d\vec{l} \Rightarrow \sin\theta = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$dH = \frac{I\,dl}{4\pi r^2}$$

$$dH_\perp = dH \sin\alpha$$

$$H_\perp = \int_0^{2R\pi} \frac{I\,dl}{4\pi r^2} \sin\alpha =$$

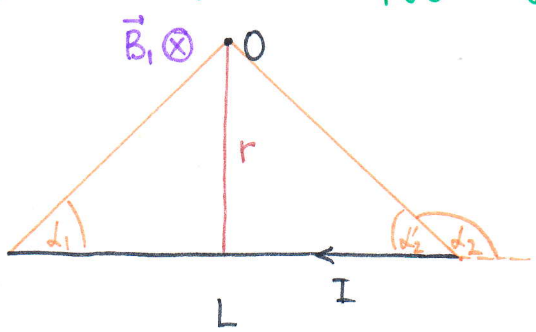
$$= \frac{I \sin\alpha}{4\pi r^2} \int_0^{2R\pi} dl =$$

$$= \frac{I \sin\alpha}{4\pi r^2}\, 2\pi R$$

$$\sin\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}}$$

$$\boxed{H_\perp = \frac{IR^2}{2(R^2+a^2)^{3/2}}} \qquad \boxed{\vec{H} = \frac{IR^2}{2(R^2+a^2)^{3/2}}\,\vec{e}_x}$$

52. Кроз прави танки проводник дужине L тече струја јачине I. Уочимо тачку O која се налази на растојању r од средине проводника. Колико пута се повећа магнетна индукција у тачки O ако око ње савијемо дати проводник по кругу полупречника r?



I (ПРЕ САВИЈАЊА):

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2') \quad \text{(ЗАД. 46.)}$$

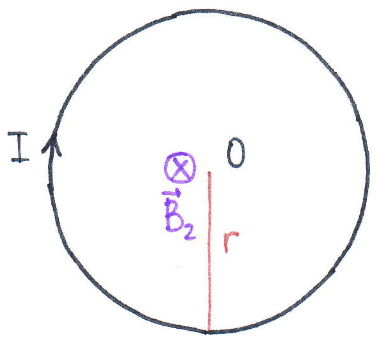
$$a \equiv r \qquad \cos\alpha_1 = \cos\alpha_2'$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\, 2\cos\alpha_1$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{\frac{L}{2}}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2\right)^{1/2}} = \frac{L}{2\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2\right)^{1/2}}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 I L}{4\pi r \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}}$$

II (након савијања):



$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2r}$$ (задатак 50)

$2\pi r = L \quad \Rightarrow \quad r = \frac{L}{2\pi}$

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\dfrac{\mu_0 I}{2r}}{\dfrac{\mu_0 I L}{{}_2 4\pi r \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + r^2}}} =$$

$$= \frac{2\pi \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2}}{L} =$$

$$= \frac{2\pi \frac{L}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{\pi^2}}}{L} =$$

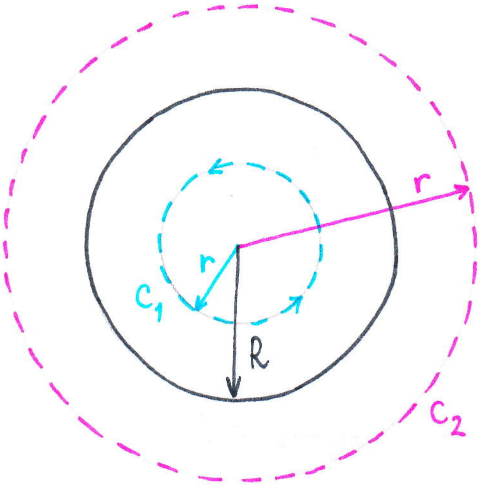
$$= \sqrt{\pi^2 + 1}$$

$$\boxed{B_2 = \sqrt{\pi^2 + 1}\; B_1}$$

53. Дуж дугог, правог, пуног кружног цилиндра радијуса R тече струја константне јачине i.

а) Наћи јачину МП у и ван проводника.

б) На ком растојању r_m од осе проводника ће јачина МП бити иста као и на кругу полупречника R/m, где је m дати реални број већи од јединице $(m \in R,\ m > 1)$.



а) $r < R$:

$$\oint_{C_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = i_1 = \int_S \vec{j} \cdot dS$$

$$j = \frac{i}{\pi R^2}$$

$$\oint_{C_1} H ds = \int_{S_1} \frac{i}{\pi R^2} dS$$

$$H \oint_{C_1} ds = \frac{i}{\pi R^2} \int_{S_1} dS$$

$$H \cdot 2\pi r = \frac{i}{\pi R^2} S_1 \qquad S_1 = r^2 \pi$$

$$H\ 2\pi r = \frac{i}{\pi R^2} r^2 \pi$$

$$\boxed{H_{(r<R)} = \frac{i}{2\pi R^2} r} \qquad H_{(r<R)} = \frac{jr}{2}$$

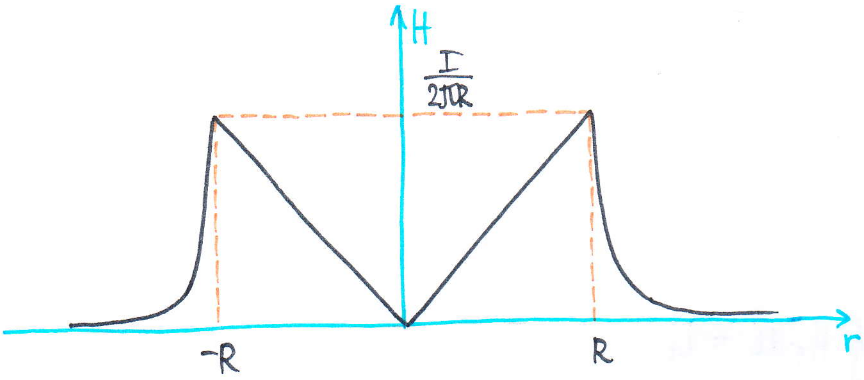
$r > R:$

$$\oint_{C_2} H\,ds = i$$

$$H \oint_{C_2} ds = i$$

$$H\; 2r\pi = i$$

$$\boxed{H_{(r>R)} = \frac{i}{2r\pi}}$$



ЈАЧИНА МП У ПРОВОДНИКУ ЛИНЕАРНО РАСТЕ, А ВАН ПРОВОДНИКА ХИПЕРБОЛИЧНО ОПАДА

б) $r_m = ?$ $\qquad \frac{R}{m}$, $m<1 \Rightarrow \frac{R}{m} < R$

$$\frac{i}{2\pi r_m} = \frac{i\,R}{2\pi R^2\,\underbrace{m}_{=r}}$$

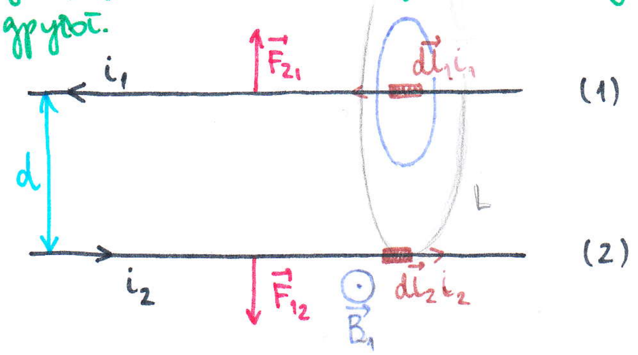
$$\boxed{r_m = Rm}$$

$i = 1A$, $\quad R = 1cm \quad m = 2$

$r_m = 2cm$

$$H(r_m) = \frac{i}{2\pi r_m} = \frac{1A}{2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}02m} = \frac{1A}{0{,}1256m} = 7{,}96\,\frac{A}{m}$$

54. Два права, веома дуга танка проводника постављени су паралелно један у односу на други, на растојању d. Кроз први протиче струја i_1, а кроз други i_2, али у супротном смеру. Одредити силу којом ови проводници делују један на другог.



ДА ЈЕ ПРОВОДНИК БЕСКОНАЧНО ДУГ ОНДА БИ И СИЛА БИЛА БЕСКОНАЧНА; ЗАТО СЕ КАЖЕ „ВЕОМА ДУГ ПРОВОДНИК" $(l \gg 1)$

$$d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$$

СИЛА КОЈОМ МП (1) ДЕЛУЈЕ НА СТРУЈНИ ЕЛЕМЕНТ ПРОВОДНИКА (2)

$$d\vec{F}_{12} = i_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

$$\vec{F}_{12} = \int i_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

ТЕОРЕМА О МАГНЕТНОМ НАПОНУ: $\oint_L \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = i_1$

$$\vec{H}_1 \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = H\, dl$$

$$\oint_L H_1\, dl = i_1$$

$$H_1 \oint_L dl = i_1$$

$$H_1 \cdot 2\pi d = i_1 \Rightarrow H_1 = \frac{i_1}{2\pi d} \quad ; \quad B_1 = \mu_0 H_1 \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$$

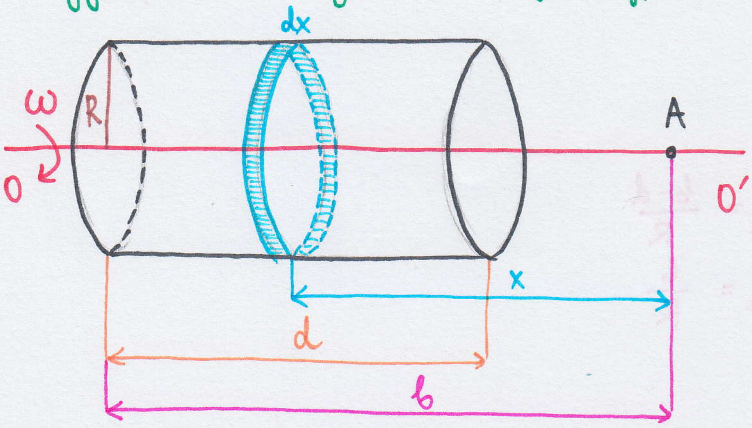
$$\vec{F}_{12} = \int i_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

$$d\vec{l}_2 \perp \vec{B}_1 \Rightarrow d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = dl_2 B_1$$

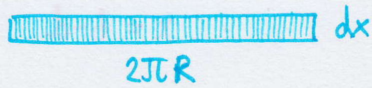
$$F_{12} = B_1 i_2 \int_0^l dl_2 = B_1 i_2 l = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} i_2 l$$

$$\boxed{F_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{l}{d} i_1 i_2}$$

55. Цилиндар дужине d, кружног попречног пресека, полупречника R, равномерно је наелектрисан. Површинска густина наелектрисања је σ. Цилиндар ротира око осе OO' угаоном брзином ω. Наћи јачину МП на оси, у тачки A која је на удаљености b од почетка цилиндра.

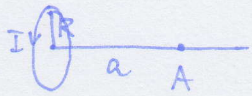


$$dS = 2\pi R\, dx$$



$$H = \frac{I}{2}\frac{R^2}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

(52. задатак)



$$dq = \sigma\, dS =$$

$$= \sigma\, 2\pi R\, dx$$

$$dI = \frac{dq}{T} =$$

$$= \frac{2\pi \sigma R\, dx}{\frac{2\pi}{\omega}} =$$

$$= \sigma \omega R\, dx$$

$$dH = \frac{dI}{2}\frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\sigma \omega R^3\, dx}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$H = \int dH$$

$$H = \frac{\sigma \omega R^3}{2} \int_{b-d}^{b} \frac{dx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\sigma \omega R^3}{2} \int_{b-d}^{b} \frac{dx}{R^3\left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{x}{R} = t \qquad x = b-d \qquad t_1 = \frac{b-d}{R}$$

$$dx = R\,dt \qquad x = b \qquad t_2 = \frac{b}{R}$$

$$H = \frac{\sigma \omega}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$$

$$t = \operatorname{tg}\varphi \qquad t_1 = \frac{b-d}{R} \qquad \varphi_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{b-d}{R}$$

$$dt = \frac{1}{\cos^2\varphi}\, d\varphi \qquad t_2 = \frac{b}{R} \qquad \varphi_2 = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{R}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} \Rightarrow \cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$$

$$H = \frac{\sigma \omega}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)\, d\varphi}{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^{3/2}} =$$

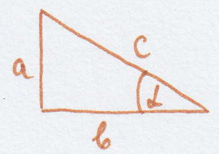
$$= \frac{\sigma \omega}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} =$$

$$= \frac{\sigma \omega}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{\sigma \omega}{2} \sin\varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} =$$

$$= \frac{\sigma \omega}{2}\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right) = \frac{\sigma \omega}{2}\left(\sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{R}\right) - \sin\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b-d}{R}\right)\right)$$

$$\sin(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

$$\frac{a}{b} = x \qquad \Rightarrow \quad a = x \qquad b = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = x^2 + 1^2$$

$$c = \sqrt{x^2+1}$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \sin(\operatorname{arctg} x)$$

$$H = \frac{\tau\omega}{2}\left(\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{R}\right) - \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{b-d}{R}\right)\right) =$$

$$= \frac{\tau\omega}{2}\left(\frac{\frac{b}{R}}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{R}\right)^2}} - \frac{\frac{b-d}{R}}{\sqrt{1+\left(\frac{b-d}{R}\right)^2}}\right) =$$

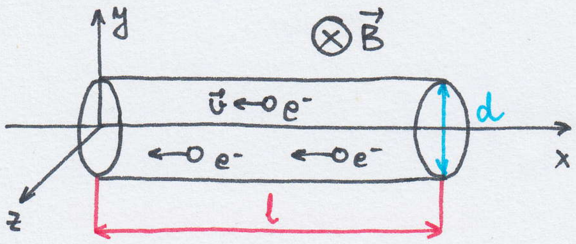
$$= \frac{\tau\omega}{2}\left(\frac{b}{R\frac{1}{R}\sqrt{R^2+b^2}} - \frac{b-d}{R\frac{1}{R}\sqrt{R^2+(b-d)^2}}\right)$$

$$\boxed{H = \frac{\tau\omega}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{R^2+b^2}} - \frac{b-d}{\sqrt{R^2+(b-d)^2}}\right)}$$

56. Од бакра масе $m = 7g$ направљена је права жица дијаметра 1mm. Кроз тај проводник тече струја јачине 1A. Проводник се налази у хомогеном МП индукције 1T.

а) Наћи магнетну силу која делује на проводник

б) Наћи укупну Лоренцову силу на све проводне e^- у овој жици ако узмемо да се они крећу с десна на лево средњом брзином $v = 75{,}75 \cdot 10^{-6}$ m/s



a) $d\vec{F} = I\, d\vec{l} \times \vec{B}$

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = IlB\, \vec{e}_y$$

$$\vec{B} = B(-\vec{e}_z) \qquad I\vec{l} = Il\,\vec{e}_x \qquad \vec{e}_x \times (-\vec{e}_z) = \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{S \cdot l}$$

$$l = \frac{m}{\rho \cdot S} \qquad S = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$l = \frac{4m}{\rho \pi d^2} \qquad \rho_{cu} = 8{,}96\,g/cm^3$$

$$F = IB\,\frac{4m}{\rho \pi d^2}$$

$$F = 1A \cdot 1T\, \frac{4 \cdot 7g}{8{,}96 \cdot 10^{-6}\,\frac{g}{m^3} \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-6}\,m^2} =$$

$$= \frac{28\,AT}{28{,}1344 \cdot 10^{-12}\,\frac{1}{m}} = 0{,}99\,N$$

$$\boxed{F \approx 1N}$$

$$T = \frac{Wb}{m^2} = \frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{kg}{A \cdot s} = \frac{N}{A \cdot m}$$

б) $\vec{F}_1 = q\vec{v} \times \vec{B}$ ЛОРЕНЦОВА СИЛА КОЈА ДЕЛУЈЕ НА ЈЕДНУ ЧЕСТИЦУ

$$\vec{F}_1 = (-e)\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{v} = v(-\vec{e}_x)$$
$$\vec{B} = B(-\vec{e}_z)$$

$$\vec{F}_1 = ev\,\vec{e}_x \times B(-\vec{e}_z)$$

$$\vec{F}_1 = evB\,\vec{e}_y$$

$F_N = NF_1$ ЛОРЕНЦОВА СИЛА КОЈА ДЕЛУЈЕ НА СВЕ ЧЕСТИЦЕ (e^-)

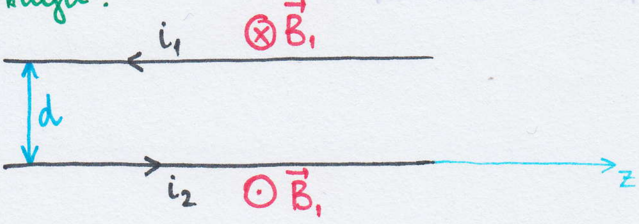
$N = m\dfrac{N_A}{M_{Cu}}$ $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ $M_{Cu} = 63{,}57\ kg/kmol$

$$F_N = m\frac{N_A}{M_{Cu}}evB =$$

$$= 7g\,\frac{6{,}023\cdot 10^{23}}{63{,}57\ g/mol}\,1{,}6\cdot 10^{-19}C \cdot 75{,}75\cdot 10^{-6}\frac{m}{s}\cdot 1T$$

$$\boxed{F_N = 0{,}804\ N}$$

57. Два права, веома дугачка проводника постављена су паралелно један другом, на растојању d. Кроз први проводник протиче струја i_1, а кроз други i_2, али у супротном смеру. Којом силом по јединици дужине интерагују ови проводници?



$\vec{F} = i_2\vec{l} \times \vec{B}_1$ B_1 – МАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА КОЈУ СТВАРА ПРВИ ПРОВОДНИК НА МЕСТУ ДРУГОГ ПРОВОДНИКА

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{F} = i_2 l\,\vec{e}_z \times \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_r$$

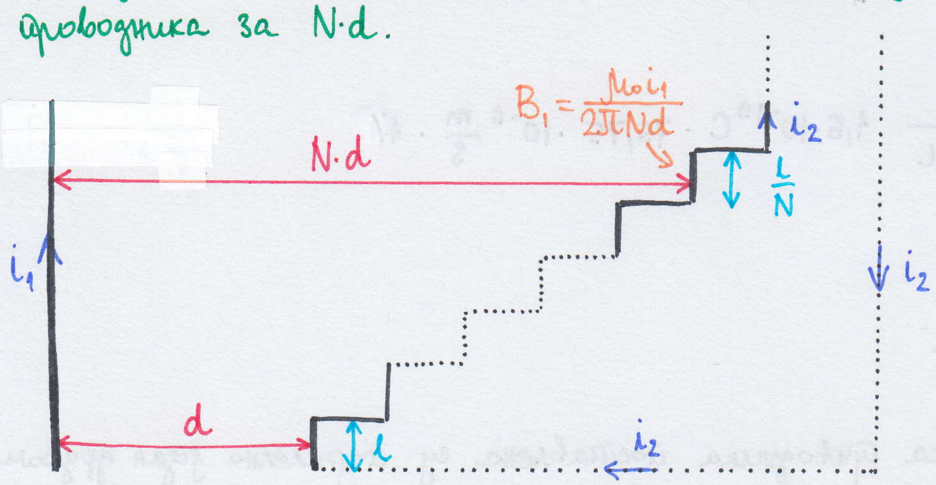
$$\vec{F} = -\frac{i_1 i_2 l \mu_0}{2\pi d}\,\vec{e}_r$$

ОДБОЈНА СИЛА

$$\boxed{\frac{F}{l} = \frac{i_1 i_2 \mu_0}{2\pi d}}$$

СИЛА ПО ЈЕДИНИЦИ ДУЖИНЕ КОЈОМ ПРОВОДНИЦИ ДЕЛУЈУ МЕЂУСОБНО

58. Којом силом F привлачи прави, бесконачни, танки проводник степенасти проводник са слике? Висина N-тог степеника је $\frac{l}{N}$ и удаљен је од правог проводника за $N\cdot d$.



$$F_N = i_2 \frac{l}{N} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi N d}$$

СИЛА КОЈА ДЕЛУЈЕ НА N-ТИ СЕГМЕНТ

$$F_N = i_1 i_2 l \frac{\mu_0}{2\pi d N^2}$$

$$F = \sum_{N=1}^{\infty} F_N$$

СИЛА КОЈА ДЕЛУЈЕ НА ИЗЛОМЉЕНИ ПРОВОДНИК СА ∞ МНОГО СТЕПЕНИКА (СТЕПЕНИЧАСТИ)

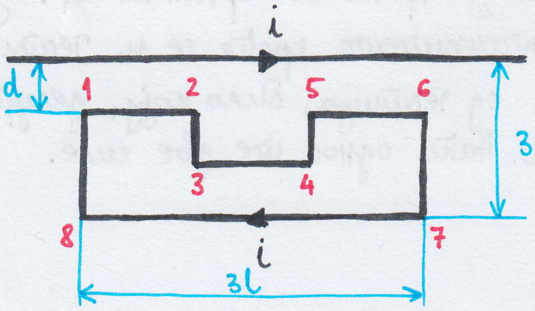
$$F = \frac{i_1 i_2 l \mu_0}{2\pi d} \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2}$$

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$F = \frac{i_1 i_2 l \mu_0}{2\pi d} \frac{\pi^2}{6}$$

$$\boxed{F = \frac{i_1 i_2 l \mu_0 \pi}{12 d}}$$

59. У близини правог, бесконачног и танког проводника којим тече струја јачине i налази се контура којом тече струја исте јачине. Цео систем је у једној равни, а струјни сегменти су или паралелни са проводником или нормални на њега. Наћи силу којом проводник делује на ову контуру.



$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \underbrace{\vec{F}_{23} + \vec{F}_{34} + \vec{F}_{45}}_{=0} + \vec{F}_{56} + \underbrace{\vec{F}_{67} + \vec{F}_{78} + \vec{F}_{81}}_{=0}$$

$$\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{45} \qquad \vec{F}_{67} = -\vec{F}_{81}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{34} + \vec{F}_{56} + \vec{F}_{78}$$

$$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \leftarrow$$

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{56}$$

$$F = F_{12} + F_{34} + F_{56} - F_{78}$$

$$F_{12} = F_{56} = i l \frac{\mu_0 i}{2\pi d} = l \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}$$

$$F_{34} = l \frac{\mu_0 i^2}{2\pi 2d} = l \frac{\mu_0 i^2}{4\pi d}$$

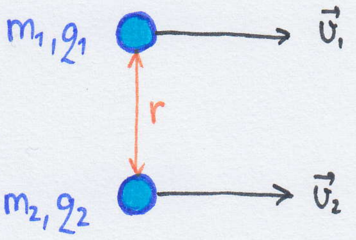
$$F_{78} = 3l \frac{\mu_0 i^2}{2\pi 3d} = l \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}$$

$$F = 2\, l \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} + l \frac{\mu_0 i^2}{4\pi d} - l \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} =$$

$$= l \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \left(2 + \frac{1}{2} - 1\right)$$

$$\boxed{F = \frac{3}{2}\, l \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d}}$$

60. Прва честица масе m_1 и наелектрисања q_1 креће се брзином v. У истом правцу и смеру, брзином истог интензитета креће се и честица масе m_2 и наелектрисање q_2. На једну од честица, било коју, делује како магнетна, тако и електрична сила. Нађи однос те две силе.



$$B_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} q_1 v$$ МП које q_1 ствара на месту q_2

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$F_B = q_2 v B_{12}$$

$$F_B = \frac{\mu_0 q_1 q_2 v^2}{4\pi r^2}$$ МАГНЕТНА СИЛА КОЈОМ q_1 ДЕЛУЈЕ НА q_2 (ТЈ. q_2 НА q_1)

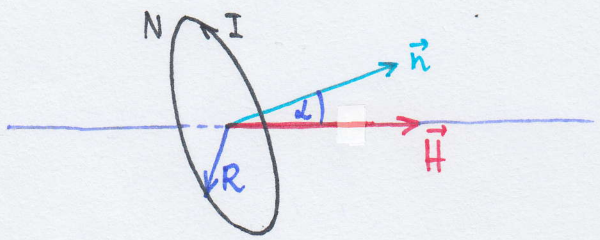
$$F_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r^2}$$ ЕЛЕКТРИЧНА СИЛА

$$\frac{F_B}{F_E} = \frac{\dfrac{\mu_0 \boxed{q_1 q_2} v^2}{4\pi r^2}}{\dfrac{\boxed{q_1 q_2}}{4\pi \varepsilon_0 r^2}} = \varepsilon_0 \mu_0 v^2$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c_0^2}$$

$$\boxed{\frac{F_B}{F_E} = \frac{v^2}{c_0^2} = \left(\frac{v}{c_0}\right)^2}$$

61. Раван калем полупречника R има N намотаја. Оса калема је у равни магнетских меридијана под углом α у односу на МП. Кроз калем тече струја I. Одредити момент силе којем је изложен калем, ако знамо да је јачина МП Земље на месту калема $H = 40\ A/m$. Израчунати M ако је $N = 500$, $I = 2A$, $R = \sqrt{5}$ cm и $\alpha = 45°$.



$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{S}$$ МАГНЕТНИ МОМЕНТ ЈЕДНОГ НАВОЈА

$$\vec{S} = S \cdot \vec{n}$$

$$|\vec{S}| = \pi R^2$$

$$\vec{p}_m = N I S \vec{n}$$ МАГНЕТНИ МОМЕНТ КАЛЕМА СА N НАВОЈА

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$$ МОМЕНТ СИЛЕ

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$M = p_m B \sin\alpha$$

$$M = \underbrace{N I \overbrace{R^2\pi}^{S}}_{p_m} \underbrace{\mu_0 H}_{B} \sin\alpha$$

$$\boxed{M = N I R^2 \pi \mu_0 H \sin\alpha}$$

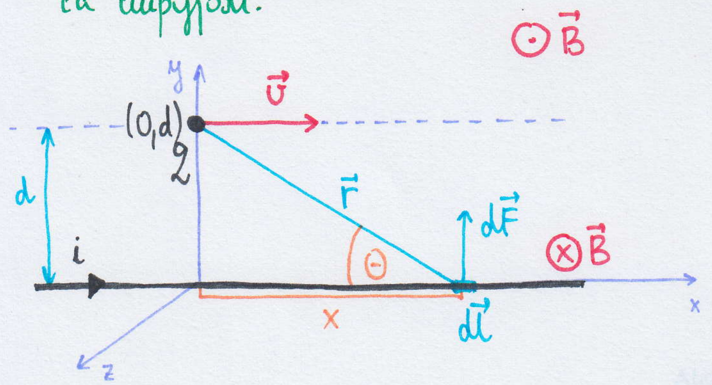
МОМЕНТ СИЛЕ ТЕЖИ ДА ПОСТАВИ КАЛЕМ ТАКО ДА БУДЕ $\vec{n} \parallel \vec{H}$

$$M = 500 \cdot 2A \cdot (\sqrt{5} \cdot 10^{-2}\, m)^2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 3{,}14 \cdot 10^{-7} \frac{H}{m} \cdot 40 \frac{A}{m} \sin 45^\circ$$

$$H = \frac{kg\, m^2}{s^2 A^2} = \frac{N \cdot m}{A^2}$$

$$\boxed{M = 5{,}58 \cdot 10^{-5}\ Nm}$$

62. Позитивно наелектрисање q креће се паралелно правом, бесконачно дугом проводнику са струјом на растојању d. Брзина наел. честице је v, а јачина струје у проводнику i. Којом силом покретно наел. привлачи проводник са струјом?



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

МАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА У ТАЧКИ $(x, 0)$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \cancel{r} \sin\theta}{r^{\cancel{3}\,2}} \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q v \sin\theta}{r^2} \vec{e}_z$$

$$\sin\theta = \frac{d}{r} = \frac{d}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

$$d\vec{F} = i\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

СИЛА КОЈА ДЕЛУЈЕ НА СТРУЈНИ ЕЛЕМЕНТ

$$d\vec{F} = i\,dx\,\vec{e}_x \times \left(-\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{qv\sin\Theta}{r^2}\,\vec{e}_z\right)$$

$$\vec{e}_x \times (-\vec{e}_z) = \vec{e}_y$$

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,qv\,\frac{d}{\sqrt{x^2+d^2}}\,\frac{dx}{x^2+d^2}\,\vec{e}_y$$

$$d\vec{F} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,qv\,\frac{d\cdot dx}{(x^2+d^2)^{3/2}}\,\vec{e}_y$$

СИЛА ЈЕ ПРИВЛАЧНА И УСМЕРЕНА ДУЖ + СМЕРА Y-ОСЕ

$$dF = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,qv\,\frac{d\cdot dx}{(x^2+d^2)^{3/2}}$$

$$F = \int dF =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,qvd\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+d^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,qv\,d\,\frac{1}{d^2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}$$

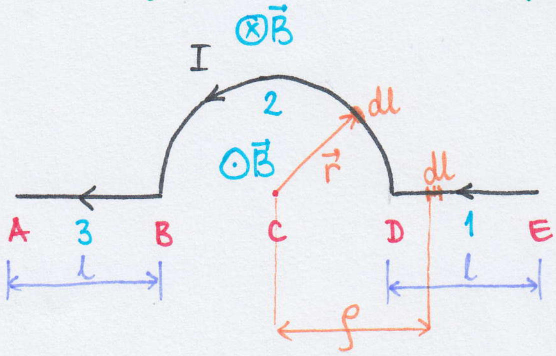
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \times$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{d^2}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{d^2}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+d^2}} = \ldots = -1$$

$$F = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\,\frac{qv}{d}\,(1-(-1)) \Rightarrow \boxed{F = \frac{\mu_0 i q v}{2\pi d}}$$

63. Кроз танки струјни проводник, чији је облик приказан на слици, тече струја јачине I у назначеном смеру. Одредити магнетну индукцију у тачки C.



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_3 = 0$$

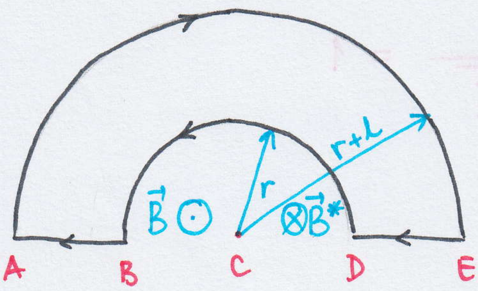
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\vec{l} \times \vec{\rho}}{\rho^3}$$

$$\rho \uparrow\uparrow dl \Rightarrow I\, d\vec{l} \times \vec{\rho} = 0$$

$$\vec{B} = \vec{B}_2$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \boxed{\frac{\mu_0 I}{2r}}$$ МАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА КРУЖНОГ ПРОВОДНИКА

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4r}}$$

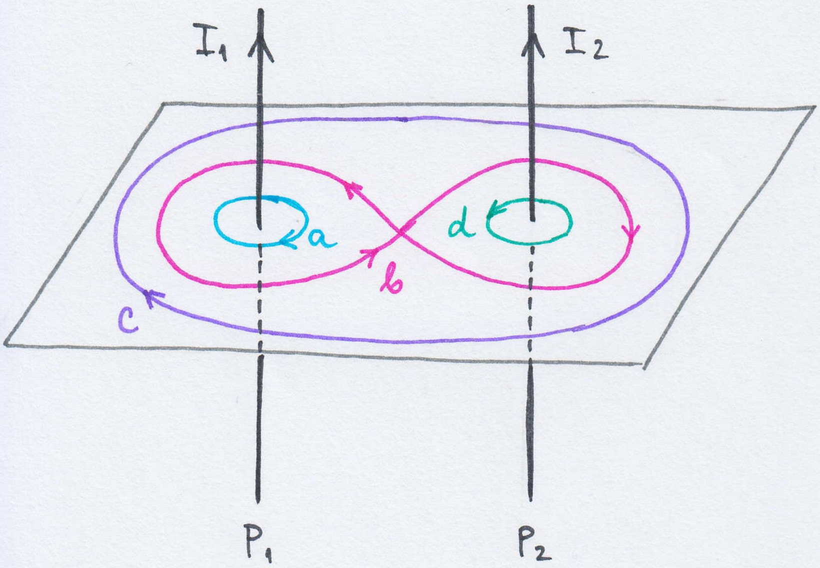


$$B^* = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 I}{2(r+l)} = \frac{\mu_0 I}{4(r+l)}$$

КОЛИНЕАРНИ, АЛИ СУПРОТНОГ СМЕРА У ТАЧКИ C

$$B_u = B - B^* = \frac{\mu_0 I}{4r} - \frac{\mu_0 I}{4(r+l)} = \frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+l}\right)$$

64. Одредити магнетски напон дуж затворених контура назначених на слици. Познате су јачине струја I_1 и I_2 у проводницима P_1 и P_2. Назначени су смерови струја, као и смерови обилажења контура.



$$U_m = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{S} = i$$

ТЕОРЕМА О МАГНЕТСКОМ НАПОНУ (ЦИРКУЛАЦИЈИ ЈАЧИНЕ МП)

АЛГЕБАРСКИ ЗБИР СВИХ СТРУЈА

$$\vec{H} \cdot d\vec{S} = H_s \, dS$$

$$i = \sum_k I_k$$

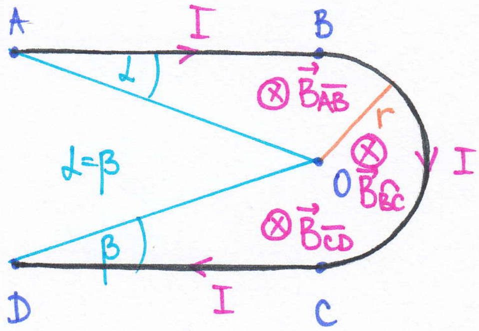
$$U_{m_1} = \oint_a H_s \, dS = -I_1$$

$$U_{m_2} = \oint_b H_s \, dS = I_1 - I_2$$

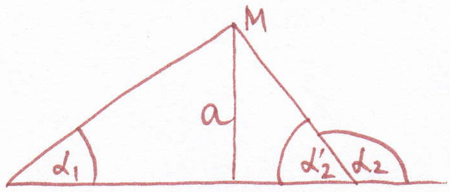
$$U_{m_3} = \oint_c H_s \, dS = -I_1 - I_2$$

$$U_{m_4} = \oint_d H_s \, dS = I_2$$

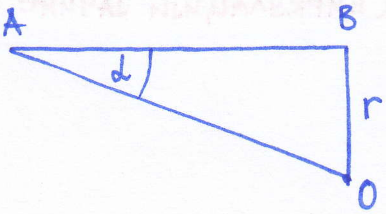
65. Струја јачине I тече танким проводником дужине L. Проводник је савијен у облик „U" и сачињавају га две дужи, $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$, и полукруг $\widehat{BC}$. Одредити магнетну индукцију у центру полукружног дела проводника.



у тачки O: $\vec{B} = \vec{B}_{\overline{AB}} + \vec{B}_{\widehat{BC}} + \vec{B}_{\overline{CD}}$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2'\right)$$



$$\cos\alpha_2 = \cos\alpha_2' = \cos 90^\circ = 0$$

$$B_{\overline{AB}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\alpha + \cos 90^\circ\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\cos\alpha$$

$$B_{\overline{CD}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\cos\alpha$$

$$B_{\widehat{BC}} = \frac{1}{2}\,\frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{\mu_0 I}{4r}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{r^2 + \overline{AB}^2}}$$

$$L = \underbrace{\overline{AB} + \widehat{BC} + \overline{CD}}_{\overline{AB} = \overline{CD}} = 2\overline{AB} + \frac{1}{2}\,2r\pi = 2\overline{AB} + r\pi \Rightarrow \overline{AB} = \frac{L - r\pi}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{L - r\pi}{2\sqrt{r^2 + \left(\frac{L-r\pi}{2}\right)^2}} =$$

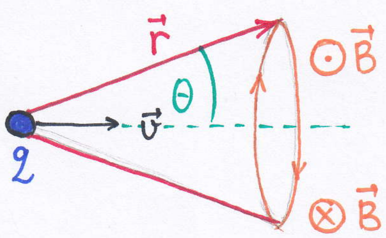
$$= \frac{L - r\pi}{2\,\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 + (L-r\pi)^2}} =$$

$$= \frac{L - r\pi}{\sqrt{4r^2 + (L-r\pi)^2}}$$

$$B = \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\,\frac{L-r\pi}{\sqrt{4r^2+(L-r\pi)^2}}}_{B_{\overline{AB}}} + \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4r}}_{B_{\widehat{BC}}} + \underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\,\frac{L-r\pi}{\sqrt{4r^2+(L-r\pi)^2}}}_{B_{\overline{CD}}}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4r}\left(1 + \frac{2}{\pi}\,\frac{L-r\pi}{\sqrt{4r^2+(L-r\pi)^2}}\right)}$$

66. Честица оптерећења q креће се праволинијски брзином v. На растојању r од честице измерена је максимална вредност магнетне индукције B_m. Одредити оптерећење q сматрајући да су остале величине познате.



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}$$

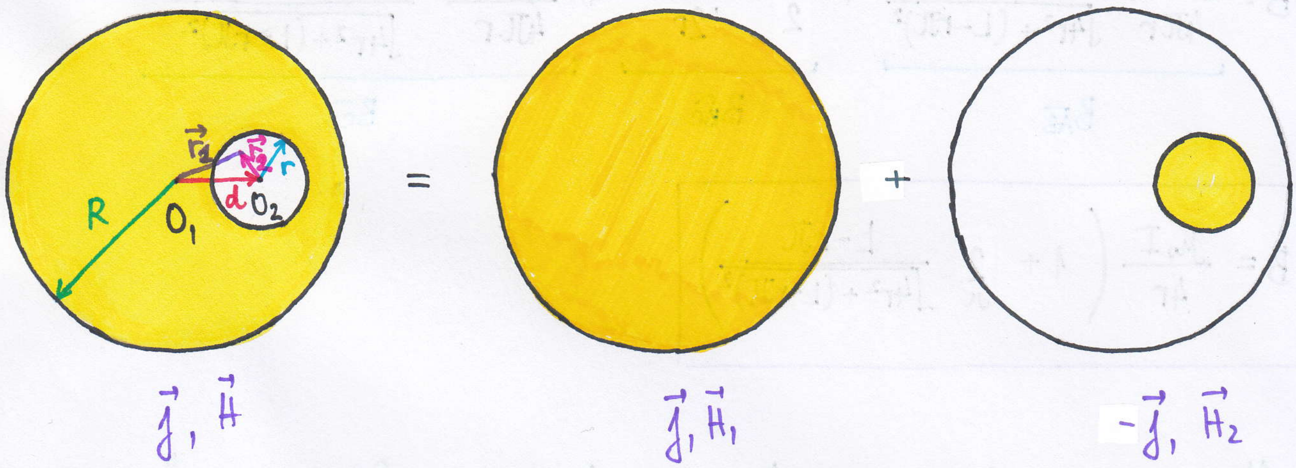
$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{qvr\sin\theta}{r^{3}\,2}$$

$$|\sin\theta|_{max} = 1 \quad \Rightarrow \theta_{max} = \frac{\pi}{2} \qquad\qquad \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta < 1$$

$$B_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{qv}{r^2}$$

$$\boxed{q = \frac{4\pi}{\mu_0}\,\frac{r^2 B_m}{v}}$$

67. Кроз дуг, прав, пун (од хомогеног материјала) цилиндар кружног попречног пресека, полупречника R, тече константна струја јачине I. У проводнику постоји шупљина у облику кружног цилиндра полупречника r. Осе ова два цилиндра су паралелне и налазе се на међусобном растојању d. Одредити јачину МП у шупљини.



$$\vec{d} + \vec{r}_2 = \vec{r}_1$$

$$j = \frac{I}{S}$$

$$I = \text{const} \Rightarrow j = \text{const}$$

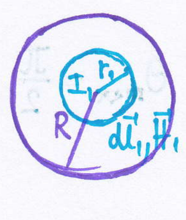
$$S = S_1 - S_2 = R^2\pi - r^2\pi$$

$$j = \frac{I}{\pi(R^2 - r^2)}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

$$H = H_1 - H_2$$

КАДА НЕМА ШУПЉИНЕ: $\oint_{L_1} \vec{H}_1\, d\vec{l}_1 = I_1$



$$\vec{H}_1 \uparrow\uparrow d\vec{l}_1$$

$$\oint_{L_1} H_1\, dl_1 = I_1$$

$$H_1 \underbrace{\oint_{L} dl_1}_{2r_1\pi} = I_1$$

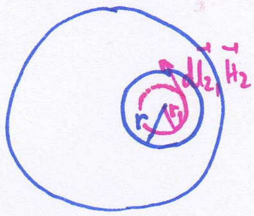
$$H_1 = \frac{I_1}{2r_1\pi}$$

$$j = const$$

$$j = \frac{I_1}{S_1} = \frac{I_1}{r_1^2\pi} \Rightarrow I_1 = j r_1^2 \pi \Rightarrow H_1 = \frac{j r_1^2 \pi}{2 r_1 \pi}$$

$$H_1 = \frac{j r_1}{2}$$

само у шупљини: $\oint_{L_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 = I_2$



$$H_2 \underbrace{\oint_{L_2} dl_2}_{2r_2\pi} = I_2$$

$$j = \frac{I_2}{S_2} = \frac{I_2}{r_2^2\pi} \Rightarrow I_2 = j r_2^2 \pi$$

$$H_2\, 2r_2\pi = j r_2^2 \pi$$

$$H_2 = \frac{j r_2}{2}$$

$$H = H_1 - H_2 = \frac{j r_1}{2} - \frac{j r_2}{2}$$

$$\boxed{H = \frac{j}{2}(r_1 - r_2)}$$

У ВЕКТОРСКОМ ОБЛИКУ:

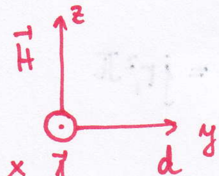
$\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{j} \times \vec{r}$ ЗА ПРАВ ЦИЛИНДАР $(\nabla \times \vec{H} = \vec{j}(\vec{x}))$ – АМПЕРОВ ЗАКОН

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{j} \times \vec{r}_1 - \frac{1}{2}\vec{j} \times r_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{j} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{j} \times \vec{d}$$



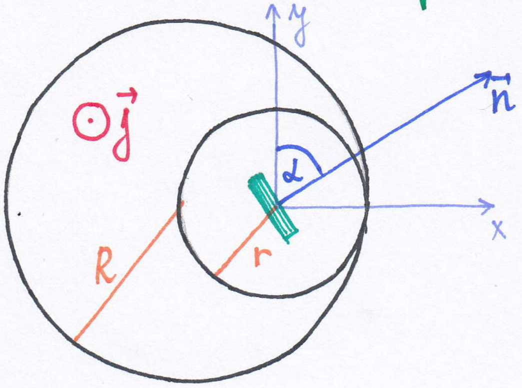
$\vec{j} = j\vec{e}_x$ $\vec{d} = d\vec{e}_y$

$$\vec{j} \times \vec{d} = jd\,\vec{e}_x \times \vec{e}_y = jd\,\vec{e}_z$$

$$\vec{H} = \frac{1}{2} jd\,\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{H} = \frac{Id}{2\pi(R^2 - r^2)}\vec{e}_z}$$

68. У цилиндричном проводнику постоји коаксијална цилиндрична шупљина полупречника $r = \frac{R}{2}$, где је R полупречник проводника. Дуж цилиндра тече струја константне густине j. У шупљини је калем, постављен тако да нормала на његову раван лежи у xOy равни и заклапа угао α према y оси. Калем се састоји од N навоја изоловане жице савијене у виду квадрата странице l. Калемом тече струја јачине i. Калем се може окретати око вертикалне, z-осе. Наћи момент спрега који делује на калем.



$\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{j} \times \vec{r}$

$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}$ СПРЕГ СИЛА КОЈИ ДЕЛУЈЕ НА РАВНУ СТРУЈНУ КОНТУРУ У ХМП

$\vec{p}_m = N\vec{p} = NI\vec{S} = NIS\vec{n}$ МАГНЕТНИ МОМЕНТ КАЛЕМА СА N НАМОТАЈА

$\vec{n} = \sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} =$

$= \mu_0 \frac{1}{2}\vec{j} \times \vec{r}$

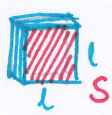
$\vec{j} = j\vec{e}_z \quad , \quad \vec{r} = r\vec{e}_x \quad \Rightarrow \vec{j} \times \vec{r} = jr\,\vec{e}_z \times \vec{e}_x = jr\,\vec{e}_y$

$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B} =$

$= NIS(\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y) \times \frac{\mu_0}{2} jr\,\vec{e}_y =$

$= NIS\frac{\mu_0 jr}{2}\left(\sin\alpha\,\underbrace{\vec{e}_x \times \vec{e}_y}_{\vec{e}_z} + \cos\alpha\,\underbrace{\vec{e}_y \times \vec{e}_y}_{0}\right)$

$S = l^2$

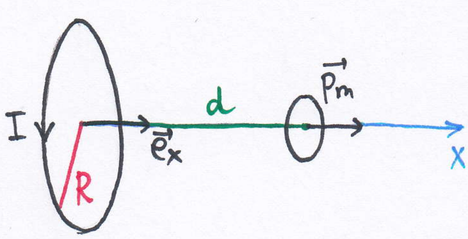


КАЛЕМ

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mu_0 N I l^2 jr}{2}\sin\alpha\,\vec{e}_z}$$

СПРЕГ ТЕЖИ ДА ПОКЛОПИ ПОЗИТИВНЕ СМЕРОВЕ $\vec{n}$ И $\vec{e}_y$

69. По кружној контури полупречника R тече струја јачине I. На оси контуре налази се елементарна контура магнетног момента $\vec{p}_m = p_m\vec{e}_x$, у тачки која је на растојању d од контуре. Наћи силу која делује на елементарну струјну контуру.



$$\vec{F} = (\vec{p}_m \cdot \nabla)\cdot\vec{B}$$

$$\nabla a = \text{grad } a$$
$$\nabla \vec{A} = \text{div } \vec{A}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\vec{p}_m \cdot \nabla = \left(p_{mx}\vec{e}_x + p_{my}\vec{e}_y + p_{mz}\vec{e}_z\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)$$

$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1 \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0 \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$

$$\vec{p}_m \cdot \nabla = p_m \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\vec{B} = B\vec{e}_x$$

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = p_m \frac{\partial B}{\partial x}\vec{e}_x$$

СИЛА КОЈОМ ВЕЛИКА КОНТУРА ДЕЛУЈЕ НА МАЛУ

$$B = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

(ЗАДАТАК 51.)

$$\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_{x=d} = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left(\frac{1}{(R^2+x^2)^{3/2}}\right)' =$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2}\left(-\frac{3}{2}(R^2+x^2)^{-\frac{3}{2}-1}\right)2x =$$

$$= -\frac{3}{2}\mu_0 I R^2 \frac{x}{(R^2+x^2)^{5/2}} =$$

$$= -\frac{3}{2}\mu_0 I R^2 \frac{d}{(R^2+d^2)^{5/2}}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{3}{2} p_m \mu_0 I R^2 \frac{d}{(R^2+d^2)^{5/2}} \vec{e}_x}$$

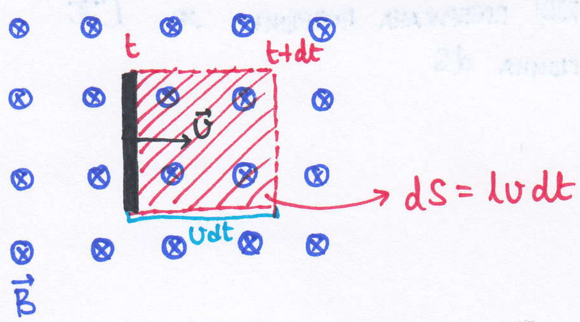
"–" говори да је сила усмерена ка кружном струјном навоју тј. сила тежи да одвуче елементарну струјну контуру у област јачег поља ако су $\vec{p}_m \uparrow\uparrow \vec{B}$

Електромагнетна индукција

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$ Фарадејев закон

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$ флукс

70. Брзином $v = 15 \frac{m}{s}$, нормално на линије сила МП индукције $B = 0{,}5\,T$ креће се проводник дужине $l = 1m$. Наћи електромоторну силу која се индукује у овом проводнику.



$$\mathcal{E} = \left| -\frac{d\phi}{dt} \right|$$

$$\mathcal{E} = \frac{B\,dS}{dt} \qquad \vec{B} \uparrow\uparrow d\vec{S}$$

$$\mathcal{E} = \frac{B l v\,dt}{dt}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = Blv}$$

$$\mathcal{E} = 0{,}5T \cdot 1m \cdot 15\frac{m}{s} = 7{,}5V$$

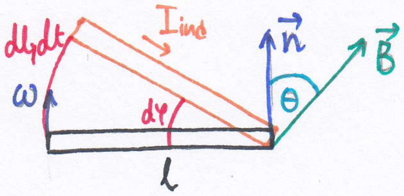
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{B\,dS}{dt} = -\frac{B l v\,dt}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -Blv$$

$$\mathcal{E} = -7{,}5V$$

71. Метални штап дужине l налази се у равни нормала са хомогеним МП индукције B гради угао $\theta = \frac{\pi}{4}$. Одредити угаону брзину ω којом треба да ротира штап око једног свог краја да би се на крајевима штапа образовао напон U.



$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$d\phi = \vec{B}\cdot d\vec{S} = \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS$$

$$d\phi = |\vec{B}|\underbrace{|\vec{n}|}_{=1} \cos\underbrace{\measuredangle(\vec{B},\vec{n})}_{=\theta} dS =$$

$$= B\, dS \cos\theta$$

$2\pi \to l^2\pi$ АКО ШТАП НАПРАВИ ПУН КРУГ (2π) ПРЕБРИСАНА ПОВРШИНА ЈЕ $l^2\pi$

$d\varphi \to dS$ ЗА УГАО $d\varphi$ СЕ ПРЕБРИШЕ ПОВРШИНА dS

$$2\pi\, dS = l^2\pi\, d\varphi$$

$$dS = \frac{l^2}{2} d\varphi$$

$$d\phi = \frac{Bl^2}{2}\cos\theta\, d\varphi$$

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt}$$ ИНТЕРЕСУЈЕ НАС САМО ИНТЕНЗИТЕТ

$$\mathcal{E} \equiv U$$

$$U = \frac{Bl^2}{2}\frac{\cos\theta\, d\varphi}{dt} \quad \omega$$

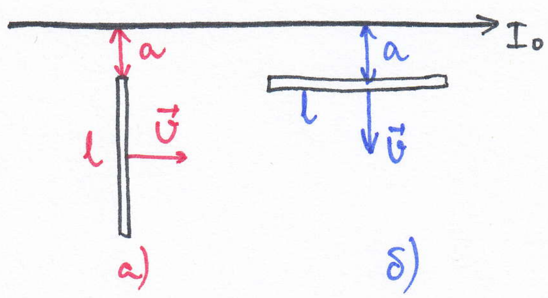
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$U = \frac{Bl^2}{2}\cos\theta\,\omega$$

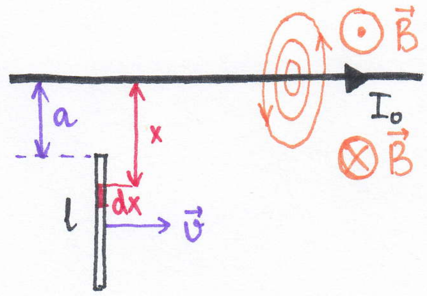
$$\boxed{\omega = \frac{2U}{Bl^2\cos\theta}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{U}{\sqrt{2}Bl^2}}$$

72. Дуж бесконачно дугог правог проводника тече струја сталне јачине I_0. Нађи зависност индуковане ЕМС од времена за метални штап дужине l који се креће брзином v у односу на проводник
а) када се штап креће у правцу проводника
б) када је правац кретања штапа нормалан на проводник.



а)



$$B(x) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x}$$

(46. ЗАДАТАК) МАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА БЕСКОНАЧНО ДУГОГ ПРОВОДНИКА

$$\mathcal{E} = Blv$$

(70. ЗАДАТАК)

$$d\mathcal{E} = Bv\,dx =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi x} v\,dx$$

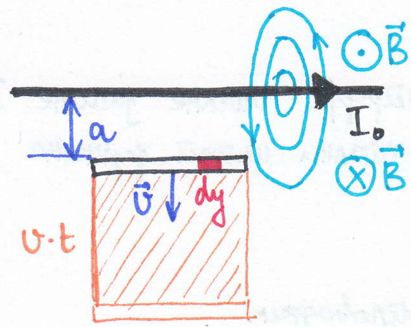
$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} v \int_a^{a+l} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} v \ln x \Big|_a^{a+l}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} v \ln \frac{a+l}{a}}$$

б)



$$t=0: \quad B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}$$

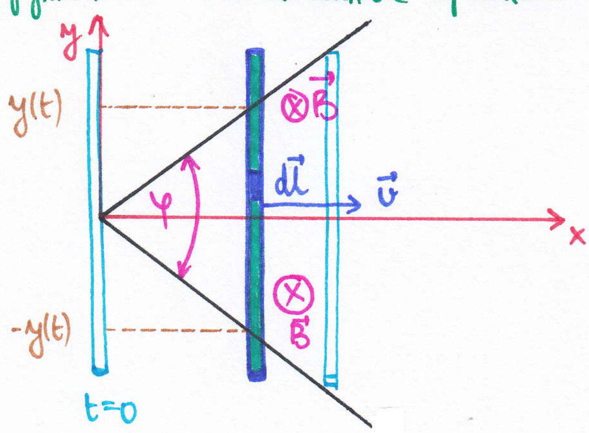
$$t: \quad B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(a+\upsilon t)}$$

$$d\mathcal{E} = B\upsilon\, dy$$

$$\mathcal{E} = B\upsilon \int_0^l dy = B\upsilon l$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi(a+\upsilon t)}\, \upsilon l}$$

73. У делу простора ограниченом двема равнима које заклапају угао φ осећа се дејство ХМП $\vec{B}$. Нека се дуж осе симетрије овог дела простора креће шипка дужине a константном брзином υ. Наћи ЕМС која се индукује у шипки.



$$\vec{B} = -B\vec{e}_z$$

$$\vec{\upsilon} = \upsilon \vec{e}_x$$

$$\vec{E} = \vec{\upsilon} \times \vec{B} =$$

$$= \upsilon \vec{e}_x \times (-B\vec{e}_z) = \upsilon B\, \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \upsilon B \vec{e}_y$$

$$\varepsilon = \int_L \vec{E} \cdot d\vec{l} =$$

$$= \int_L vB\vec{e}_y \cdot d\vec{l} =$$

$$= \int_L vB \; \vec{e}_y \, dy \, \vec{e}_y$$

$$\varepsilon = \int_L vB \, dy$$

1) $t \leq 0$ ПРЕ НЕГО ШТО ШИПКА УЂЕ У МП $(B=0)$

$$\boxed{\varepsilon = 0}$$

2) $0 < t \leq t_1$ ШИПКА ЈЕ ЈЕДНИМ ДЕЛОМ У МП

$$\varepsilon = \int_{-y(t)}^{y(t)} vB \, dy$$

$$\varepsilon = vB \, 2y(t)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{y(t)}{x} \quad \Rightarrow \quad y(t) = x \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

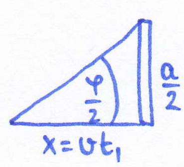
$$y(t) = vt \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\varepsilon = 2vB\,vt \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

$$\boxed{\varepsilon = 2v^2 B t \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$

3) $t > t_1$ ЦЕЛА ШИПКА ЈЕ У МП

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{x} = \frac{a}{2vt_1}$$

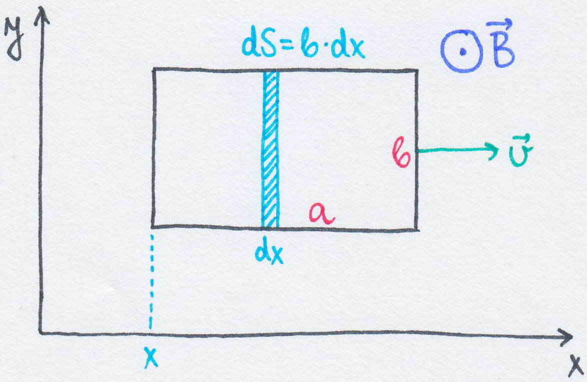


$$t_1 = \frac{a}{2v \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$

$$l = a \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E} = Bav}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2v^2 Bt \, \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} & 0 < t \leq \dfrac{a}{2v\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}} \\ Bav & t > \dfrac{a}{2v\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}} \end{cases}}$$

74. Раван правоугаони жичани рам страница a и b креће се у равни, равномерно брзином v. Вектор магнетне индукције је нормалан на раван кретања рама и функција је како положаја тачке у тој равни, тако и времена. У равни координатног система приказаног на слици индукција се мења по закону $B = B_0 \cos \omega t \cos kx$. Одредити зависност ЕМС, индуковане у раму, од времена.



$$d\Phi = B\,dS =$$

$$= B \cdot b\,dx =$$

$$= B_0 \cos\omega t \cos kx \; b \; dx$$

$$\Phi(x,t) = \int d\Phi =$$

$$= b B_0 \cos\omega t \int_x^{x+a} \cos kx \, dx$$

$$\int \cos kx = \int \cos kx \, \frac{d(kx)}{k} = \left[\int \cos kx \, \frac{k\,dx}{k} \right] = \frac{1}{k} \sin kx$$

$$\phi(x,t) = bB_0 \sin\omega t \, \frac{1}{k} \sin kx \Big|_{x}^{x+a} =$$

$$= bB_0 \sin\omega t \, \frac{1}{k} \left[\sin k(x+a) - \sin kx \right]$$

$$\varepsilon = - \frac{d\phi}{dt}$$

$$\frac{d\phi(x,t)}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} =$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial t} + v \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{bB_0}{k} \left[\sin k(x+a) - \sin kx \right] \cos\omega t \cdot \omega =$$

$$= \frac{bB_0\omega}{k} \cos\omega t \left[\sin k(x+a) - \sin kx \right]$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{bB_0}{k} \sin\omega t \left[\cos k(x+a) \cdot k - \cos kx \cdot k \right] =$$

$$= \frac{bB_0}{k} \sin\omega t \; k \left[\cos k(x+a) - \cos kx \right] =$$

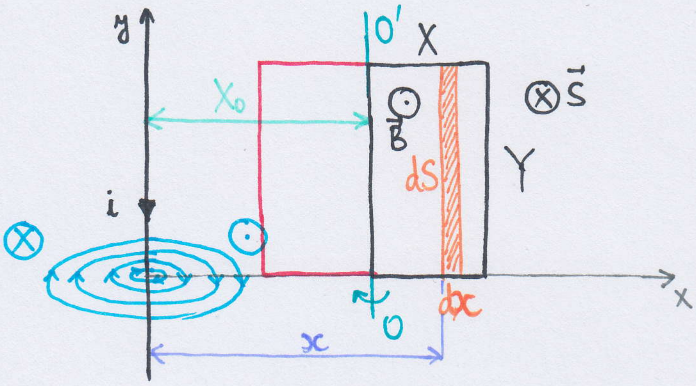
$$= bB_0 \sin\omega t \left[\cos k(x+a) - \cos kx \right]$$

$$\varepsilon = - \frac{d\phi}{dt} =$$

$$= - \left[\frac{bB_0\omega}{k} \cos\omega t \left[\sin k(x+a) - \sin kx \right] + v bB_0 \sin\omega t \left[\cos(x+a) - \cos kx \right] \right] =$$

$$\boxed{= bB_0 \left[\frac{\omega}{k} \cos\omega t \left[\sin kx - \sin k(x+a) \right] + v \sin\omega t \left[\cos kx - \cos k(x+a) \right] \right]}$$

75. Од бакарне жице пречника d направљена је равна, правоугаона контура површине XY. Контура је постављена у околини правог проводника са струјом јачине i. Страница Y је паралелна проводнику, а $X_0 > X$. Окренимо контуру за $180°$ око осе OO'. Колика количина електрицитета q је протекла кроз неки пресек жице у току процеса ротације?



$\vec{B} = B\vec{e}_z$

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad i = \frac{\varepsilon}{R} \qquad q = i\Delta t \Rightarrow q = \frac{\varepsilon \Delta t}{R}$$

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$$

$$d\Phi_1 = \vec{B}\cdot d\vec{S} =$$

$$= -B\,dS = \qquad B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

$$= -\frac{\mu_0 i}{2\pi x} Y\,dx$$

$$\Phi_1 = -\frac{\mu_0 i Y}{2\pi}\int_{X_0}^{X_0+X}\frac{dx}{x} =$$

$$= -\frac{\mu_0 i Y}{2\pi}\ln x\Big|_{X_0}^{X_0+X} = -\frac{\mu_0 i Y}{2\pi}\ln\frac{X_0+X}{X_0}$$

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 i Y}{2\pi}\ln\frac{X_0}{X_0+X}$$

$$d\phi_2 = \vec{B} \cdot d\vec{S} =$$

$$= B\,dS =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi x} Y\,dx$$

$$\phi_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} Y \int_{X_0 - X}^{X_0} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi} Y \ln \frac{X_0}{X_0 - X}$$

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi} Y \ln \frac{X_0}{X_0 - X} - \frac{\mu_0 i}{2\pi} Y \ln \frac{X_0}{X_0 + X} =$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi} Y \left[\ln \frac{X_0}{X_0 - X} - \ln \frac{X_0}{X_0 + X} \right] =$$

$$= \frac{\mu_0 i Y}{2\pi} \ln \frac{\frac{X_0}{X_0 - X}}{\frac{X_0}{X_0 + X}}$$

$$\Delta\phi = \frac{\mu_0 i Y}{2\pi} \ln \frac{X_0 + X}{X_0 - X}$$

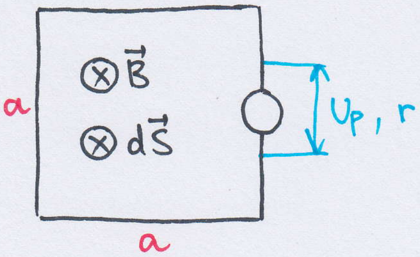
$$q = \frac{|\varepsilon| \Delta t}{R} = \frac{\Delta\phi\, \Delta t}{\Delta t\, R}$$

$$R = \rho \frac{l}{S_1} \qquad l = 2X + 2Y = 2(X + Y)$$

ρ - специфична отпорност жице

$$q = \frac{\mu_0 i Y}{2\pi} \ln \frac{X_0 + X}{X_0 - X} \frac{S_1}{\rho 2(X+Y)} ; \qquad \boxed{q = \frac{\mu_0 i Y S_1}{4\pi \rho (X+Y)} \ln \frac{X_0 + X}{X_0 - X}}$$

76. У електрично коло у облику квадрата страница a везана је тињалица унутрашње отпорности r чији је напон паљења U_p. Коло се налази у равни која је нормална на хомогено МП $\vec{B}$. Почев од тренутка $t=0$ интензитет МП почиње да се повећава по закону $B=B_0+At$. Ако је отпорност проводника који чини коло R, наћи минималну вредност константе A да би се тињалица упалила.



ТИЊАЛИЦА СВЕТЛИ КАДА ЈЕ $U_t \geq U_p$

Омов закон: $i = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$

$$U_t = i \cdot r = \frac{\varepsilon}{R+r} \cdot r$$

$$\vec{B} = \vec{B}(t)$$

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dt}$$

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B\,dS \qquad \vec{B} \parallel d\vec{S}$$

$$\phi = \oint_S B\,dS =$$

$$= B \oint_S dS = B a^2$$

$$\varepsilon = \frac{d\phi}{dt} =$$

$$= \frac{d(Ba^2)}{dt} =$$

$$= a^2 \frac{dB}{dt} = a^2 \frac{d}{dt}(B_0 + At)$$

$$\mathcal{E} = a^2\left(\underbrace{\frac{dB_0}{dt}}_{=0} + \frac{d(At)}{dt}\right)$$

$$\mathcal{E} = a^2 A \frac{dt}{dt}$$

$$\mathcal{E} = a^2 A$$

$$U_t = \frac{\mathcal{E} r}{R+r} = \frac{a^2 A r}{R+r}$$

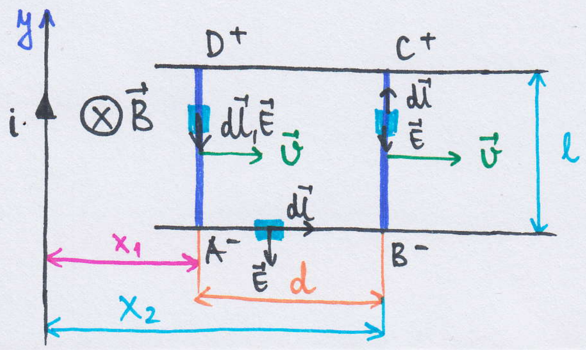
$$U_t \geq U_p$$

$$\frac{a^2 A r}{R+r} \geq U_p$$

$$a^2 A r \geq U_p (R+r)$$

$$\boxed{A \geq \frac{U_p (R+r)}{a^2 r}}$$

77. Кроз праволинијски проводник, бесконачне дужине, протиче струја константне јачине i. У једној од равни која садржи проводник налазе се проводне шине на међусобном растојању l. Низ шине се крећу два проводника брзином v која је нормална на проводник са струјом. Међусобно растојање између проводника је константно и износи d. Ако су шине и покретни проводници направљени од материјала подужног отпора ρ, наћи јачину струје у покретној контури у тренутку t од почетка кретања, ако се у почетном тренутку $t_0 = 0$ прва шипка налазила на растојању a од проводника са струјом. Појаву самоиндукције не узимати у обзир.



$$\oint \vec{H}\, d\vec{l} = i$$ $\vec{H}$ – МП БЕСКОНАЧНОГ ПРОВОДНИКА

$$H\oint dl = i$$

$$H\, 2\pi x = i \qquad H = \frac{i}{2\pi x} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$ МАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА КОЈА ПОТИЧЕ ОД ПРОВОДНИКА

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\,\vec{e}_z$$

$$\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt}$$ ЕМС КОЈА СЕ ИНДУКУЈЕ У ПРОВОДНИЦИМА

$$\vec{F}_L = q\vec{v}\times\vec{B} =$$ ЛОРЕНЦОВА СИЛА РАЗДВАЈА НАЕЛ. У ПРОВОДНИКУ

$$\left(= -e\vec{v}\times\vec{B}\right)$$ РАЗДВАЈАЊЕ ПРЕСТАЈЕ КАДА СЕ ЕЛЕКТРИЧНА И ЛОРЕНЦОВА СИЛА ИЗЈЕДНАЧЕ

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

$$\vec{F}_e = -\vec{F}_L$$

$$q\vec{E} = -q\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B}$$

$$E = |-\vec{v}\times\vec{B}| = vB\sin 90^\circ = vB$$

$$E = \frac{\mu_0 i v}{2\pi x}$$

$$\varepsilon = \int_{ABCD}\vec{E}\cdot d\vec{l} =$$

$$= \cancelto{0}{\int_A^B \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\vec{E}\perp d\vec{l}}} + \int_B^C \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\vec{E}\uparrow\downarrow d\vec{l}} + \cancelto{0}{\int_C^D \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\vec{E}\perp d\vec{l}}} + \int_D^A \underbrace{\vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\vec{E}\uparrow\uparrow d\vec{l}} =$$

$$= -\int_B^C E\,dl + \int_D^A E\,dl$$

$$\mathcal{E} = -\int_0^l \frac{\mu_0 i v}{2\pi x_2} dl + \int_0^l \frac{\mu_0 i v}{2\pi x_1} dl =$$

$$= \frac{\mu_0 i v}{2\pi}\left[\frac{1}{x_1}\int_0^l dl - \frac{1}{x_2}\int_0^l dl\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 i v}{2\pi} l \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)$$

$t_0 = 0: \quad x_1 = a$

$\qquad\quad x_2 = a + d$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 i v l}{2\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 i v l}{2\pi} \frac{a+d-a}{a(a+d)} = \frac{\mu_0 i v l d}{2\pi a(a+d)}$$

$t: \quad x_1 = a + vt$

$\qquad x_2 = a + d + vt$

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 i v l}{2\pi}\left(\frac{1}{a+vt} - \frac{1}{a+d+vt}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 i v l}{2\pi} \frac{a+d+vt-a-vt}{(a+vt)(a+d+vt)} =$$

$$= \frac{\mu_0 i v l d}{2\pi(a+vt)(a+d+vt)}$$

$I = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$ СТРУЈА У КОНТУРИ

$R = \rho \cdot L \qquad L = 2l + 2d = 2(l+d)$

$$\boxed{I = \frac{\mu_0 i v l d}{4\pi(l+d)(a+vt)(a+d+vt)}}$$

78. Одредити енергију МП по јединици дужине у простору око бесконачног, правог, танког проводника са струјом јачине i.

$$w = \frac{1}{2}\mu_0\mu H^2$$ ГУСТИНА ЕНЕРГИЈЕ МП

$$W = \int_V w\, dV$$ УКУПНА ЕНЕРГИЈА МП У ЗАПРЕМИНИ V

$$H = \frac{i}{2\pi r}$$ ЈАЧИНА МП ПРОВОДНИКА НА РАСТОЈАЊУ r ОД ПРОВОДНИКА

$$V = \underbrace{B}_{\text{БАЗА ЦИЛИНДРА ПОЛУПРЕЧНИКА } r} \cdot H = r^2\pi \cdot H$$

$$dV = 2r\,dr\,\pi H + r^2\pi \underbrace{dH}_{=0}$$

$$dV = 2r\pi\, dr$$

$$w = \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{i}{2\pi r}\right)^2$$

$$W = \int_V \frac{1}{2}\mu_0 \frac{i^2}{4\pi^2 r^2}\, 2r\pi\, dr =$$

$$= \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\int_0^\infty \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{\mu_0 i^2}{4\pi} \ln r \Big|_0^\infty =$$

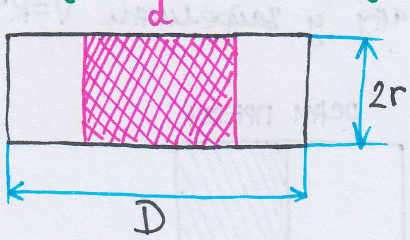
$$= \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}\Big(\underbrace{\ln\infty}_{+\infty} - \underbrace{\ln 0}_{-\infty}\Big) =$$

$$= \frac{\mu_0 i^2}{4\pi}(\infty + \infty) =$$

$$= \infty$$

$$\boxed{W = \infty}$$

79. Дат је соленоид дужине D, полупречника r. Процените колика је енергија МП у централном делу дужине $d=\frac{D}{2}$. Број навоја по јединици дужине је n.



$$H=\frac{NI}{l}=nI$$ ЈАЧИНА МП У БЕСКОНАЧНО ДУГОМ СОЛЕНОИДУ

$$w=\frac{1}{2}\mu_0 H^2=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

$$W=\int_V w\,dV=\int_V \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2\,dV=$$

$$=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \underbrace{\int_V dV}_{=r^2\pi d}=$$ ПОЉЕ ЈЕ ХОМОГЕНО

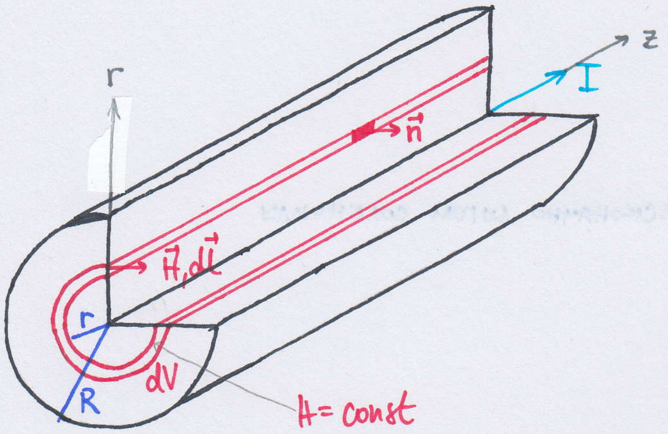
$$W=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 r^2 \pi d$$

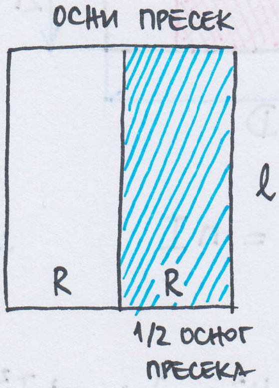
$$d=\frac{D}{2}$$

$$W=\frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 r^2 \pi \frac{D}{2}$$

$$\boxed{W=\frac{1}{4}\mu_0 \pi D (nIr)^2}$$

80. Кроз прави проводник кружног попречног пресека полупречника R тече струја јачине I. Одредити магнетни флукс кроз половину осног пресека проводника, на дужини l. Одредити и магнетну енергију садржану у запремини $V=R^2\pi l$





$$\vec{j} = \text{const}$$

$$\left.\begin{aligned} j &= \frac{I}{S} = \frac{I}{R^2\pi} \\ j &= \frac{i}{S'} = \frac{i}{r^2\pi} \end{aligned}\right\} \quad \frac{I}{R^2\pi} = \frac{i}{r^2\pi} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{r^2}{R^2} I$$

$$\oint_L \vec{H}\,d\vec{l} = i$$

$$H\, 2r\pi = \frac{r^2}{R^2} I$$

$$H = \frac{rI}{2\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad B = \mu_0 \frac{rI}{2\pi R^2}$$

$$\phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} =$$

$$= \iint_S B\, dS =$$

$$= \iint_S \frac{\mu_0 r I}{2R^2\pi}\, dS$$

$$dS = dr\,dz$$

$$\phi = \int_0^R \int_0^l \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}\, dr\, dz =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \int_0^l dz \int_0^R r\,dr =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\, l\, \frac{R^2}{2}$$

$$\boxed{\phi = \frac{\mu_0 I l}{4\pi}}$$

$$W = \int_V w\, dV =$$

$$= \int_V \frac{1}{2}\mu_0 H^2\, dV =$$

$$= \frac{\mu_0}{2} \int_V \left(\frac{rI}{2\pi R^2}\right)^2 dV$$

$$dV = d(r^2\pi l) = \pi l\, 2r\,dr = 2r\pi l\,dr$$

$V = R^2\pi l$ (поставка)

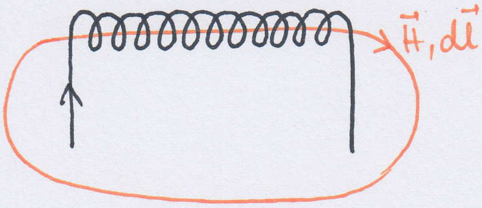
$$W = \frac{\mu_0}{2} \frac{I^2}{(2\pi R^2)^2} \int_0^R r^2\, 2r\pi l\,dr =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2\, \boxed{2}\pi l}{\underset{4}{\boxed{8}}\pi^2 R^4} \int_0^R r^3\,dr =$$

$$= \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4}\, \frac{R^4}{4}$$

$$\boxed{W = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}}$$

81. Нaћи коефицијент самоиндукције L калема дужине l, површине попречног пресека $S = r^2\pi$ и укупног броја навоја N, под условом да је $l \gg r$



$$\int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = Ni$$

$$\int_l H dl = Ni$$

$$H \int_l dl = Ni$$

$$Hl = Ni \quad \Rightarrow \quad H = \frac{Ni}{l}$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 N i}{l}$$

$\phi = Li$ — укупан флукс

$\phi_1 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} =$ — флукс кроз један навој

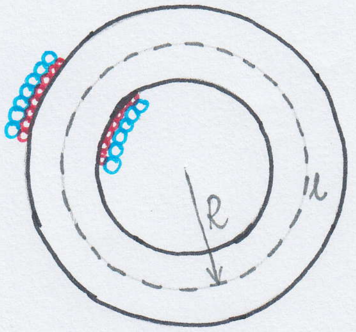
$$= \int_S B\, dS =$$

$$= \frac{\mu_0 N i}{l} \int_S dS = \frac{\mu_0 N i S}{l}$$

$$\phi = N\phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 i S}{l}$$

$$\frac{\mu_0 N^2 i S}{l} = L i \quad \Rightarrow \quad \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l}}$$

82. На торусно језгро од магнетика магнетске пермеабилности μ намотана су два једнослојна калема који тесно належу један на други. Калем K_1 има N_1 навоја, а калем K_2 има N_2 навоја. Површина попречног пресека торуса је $S = \pi r^2$, а средња линија торуса је $l = 2R\pi$. Наћи коефицијент међусобне индукције L_{12}. Занемарити самоиндукцију.



K_1
K_2

$$B = \frac{\mu_0 \mu N i}{2r\pi}$$ МАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА У ТОРУСНОМ НАМОТАЈУ

N – БР. НАМОТАЈА
i – ЈАЧИНА СТРУЈЕ

$$B_1 = \frac{\mu_0 \mu N_1 i_1}{l}$$ МАГНЕТНА ИНДУКЦИЈА КАЛЕМА K_1

$$\phi_1 = B_1 \cdot S =$$ ФЛУКС КРОЗ ЈЕДАН НАМОТАЈ КАЛЕМА K_1

$$= \frac{\mu_0 \mu N_1 i_1 S}{l}$$

$$\phi_{12} = N_2 \phi_1$$ УКУПАН ФЛУКС КРОЗ КАЛЕМ K_2

$$\phi_{12} = L_{12} \cdot i_1$$

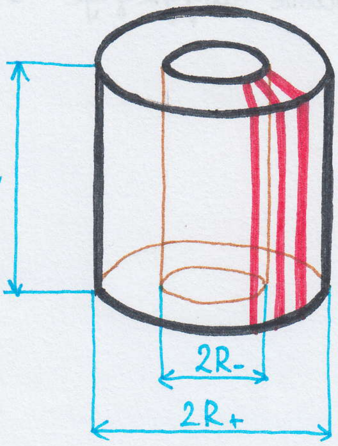
$$\phi_{21} = L_{21} \cdot i_2$$

$$N_2 \frac{\mu_0 \mu N_1 i_1 S}{l} = L_{12} \cdot i_1$$

$$L_{12} = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 S}{l} = \frac{\mu_0 \mu N_1 N_2 r^2 \pi}{2R\pi}$$

$$\boxed{L_{12} = \mu_0 \mu N_1 N_2 \frac{r^2}{2R}}$$

83. Намотано је N навоја на цилиндар висине h са унутрашњим радијусом R_- и спољашњим R_+. Кроз навоје тече струја i. Магнетна пермеабилност је μ. Наћи коефицијент самоиндукције L.



$R_- < r < R_+$

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = Ni$$

$$\vec{H} \uparrow\uparrow d\vec{l} \Rightarrow \vec{H} d\vec{l} = H dl$$

$$\oint H dl = Ni$$

$$H \oint dl = Ni$$

$$H \cdot 2r\pi = Ni \Rightarrow H = \frac{Ni}{2r\pi} \qquad B = \mu_0 \mu H \qquad B = \mu_0 \mu \frac{Ni}{2r\pi}$$

$$\phi_1 = \int_S \vec{B}(r) \cdot d\vec{S} =$$

$$= \int_S B(r)\, dS =$$

$$= \int_{R_-}^{R_+} B(r)\, h\, dr =$$

$$= h \int_{R_-}^{R_+} \mu_0 \mu \frac{Ni}{2r\pi} dr = h \mu_0 \mu \frac{Ni}{2\pi} \int_{R_-}^{R_+} \frac{dr}{r} = h \mu_0 \mu \frac{Ni}{2\pi} \ln \frac{R_+}{R_-}$$

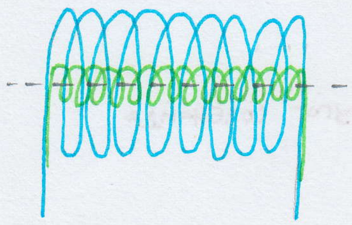
$$\Phi_u = N\,\Phi_1$$

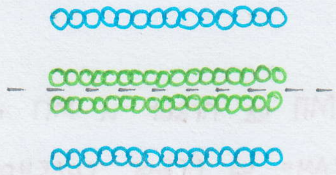
$$\Phi_u = L\cdot i$$

$$N\cdot h\mu_0\mu\,\frac{Ni}{2\pi}\,\ln\frac{R_+}{R_-} = Li$$

$$\boxed{L = h\mu_0\mu\,\frac{N^2 i}{2\pi}\,\ln\frac{R_+}{R_-}}$$

84. На калем дужине l и попречног пресека S_1 густо је намотана жица дужине L_1. Кроз калем је пропуштена струја јачине I_1. У овом калему се налази други калем исте дужине, али попречног пресека S_2, тако да се њихове уздужне осе симетрије поклапају. На други калем густо је намотана жица укупне дужине L_2. Одредити јачину струје I_2 коју треба пропуштати кроз други калем да би се енергија МП у запремини коју ствара калем већег попречног пресека удвостручила.





УЗДУЖНИ ПРЕСЕК КАЛЕМА

$$\text{БРОЈ НАВОЈА} = \frac{\text{ДУЖИНА ЖИЦЕ}}{\text{ДУЖИНА НАВОЈА}}$$

$$N_1 = \frac{L_1}{2R_1\pi} \qquad N_2 = \frac{L_2}{2R_2\pi}$$

$$S_1 = R_1^2\pi \qquad S_2 = R_2^2\pi$$

$$R_1 = \sqrt{\frac{S_1}{\pi}} \qquad R_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}}$$

$$N_1 = \frac{L_1\sqrt{\pi}}{2\pi\sqrt{S_1}} \qquad N_2 = \frac{L_2\sqrt{\pi}}{2\pi\sqrt{S_2}}$$

$$N_1 = \frac{L_1}{2\sqrt{\pi S_1}} \qquad N_2 = \frac{L_2}{2\sqrt{\pi S_2}}$$

1) СТРУЈА ПРОТИЧЕ САМО КРОЗ ВЕЋИ КАЛЕМ

$$W_1 = \int_V w_1 dV$$

$$w_1 = \frac{1}{2}\mu_0 H_1^2 \qquad H_1 = \frac{N_1 I_1}{l}$$

$$W_1 = w_1 V_1 =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 H_1^2 S_1 \cdot l =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N_1^2 I_1^2}{l^2} S_1 l =$$

$$= \frac{1}{2l}\mu_0 N_1^2 I_1^2 S_1$$

2) СТРУЈЕ ПРОТИЧУ КРОЗ ОБА КАЛЕМА

ЈАВЉАЈУ СЕ ДВЕ ПОДОБЛАСТИ:

I) УНУТАР ДРУГОГ СОЛЕНОИДА: МП ОД ПРВОГ И МП ОД ДРУГОГ СОЛЕНОИДА

II) ИЗМЕЂУ СОЛЕНОИДА: МП САМО ОД ПРВОГ СОЛЕНОИДА

$$W_{2I} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 S_2 l$$ ЕНЕРГИЈА У ПОДОБЛАСТИ I

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

$$H = H_1 \pm H_2$$ ЗНАК ЗАВИСИ ОД СМЕРОВА СТРУЈА I_1 И I_2

$$W_{2I} = \frac{1}{2}\mu_0 (H_1 \pm H_2)^2 S_2 l =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 S_2 l \left(H_1^2 + H_2^2 \pm 2H_1H_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 S_2 l \left(\frac{N_1^2 I_1^2}{l^2} + \frac{N_2^2 I_2^2}{l^2} \pm 2\frac{N_1 N_2 I_1 I_2}{l^2}\right)$$

$$W_{2I} = \frac{1}{2l}\mu_0 S_2 \left(N_1^2 I_1^2 + N_2^2 I_2^2 \pm 2 N_1 N_2 I_1 I_2\right) = \frac{1}{2}\mu_0 S_2 (N_1 I_1 \pm N_2 I_2)^2$$

$$W_{2II} = \frac{1}{2}\mu_0 H_1^2 V_{II} =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 H_1^2 (S_1 - S_2) l =$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N_1^2 I_1^2}{l^2} (S_1 - S_2) l =$$

$$= \frac{1}{2l}\mu_0 N_1^2 I_1^2 (S_1 - S_2)$$

$$W_2 = W_{2I} + W_{2II} =$$

$$= \frac{1}{2l}\mu_0 \left[S_2 (N_1 I_1 \pm N_2 I_2)^2 + (S_1 - S_2) N_1^2 I_1^2 \right]$$

ТРАЖИМО I_2 КАДА ЈЕ $W_2 = 2W_1$

$$\frac{1}{2l}\mu_0 \left[S_2 (N_1 I_1 \pm N_2 I_2)^2 + (S_1 - S_2) N_1^2 I_1^2 \right] = 2\,\frac{1}{2l}\mu_0 N_1^2 I_1^2 S_1$$

$$\underbrace{S_2 N_1^2 I_1^2} + S_2 N_2^2 I_2^2 \pm 2 S_2 N_1 N_2 I_1 I_2 + S_1 N_1^2 I_1^2 \underbrace{- S_2 N_1^2 I_1^2} - 2 S_1 N_1^2 I_1^2 = 0$$

$$S_2 N_2^2 I_2^2 \pm 2 S_2 N_1 N_2 I_1 I_2 - S_1 N_1^2 I_1^2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$I_{2(1/2)} = \frac{\mp 2 S_2 N_1 N_2 I_1 \pm \sqrt{4 S_2^2 N_1^2 N_2^2 I_1^2 + 4 S_2 N_2 S_1 N_1^2 I_1^2}}{2 S_2 N_2}$$

$$I_{2(1/2)} = \frac{\mp S_2 N_1 N_2 I_1 \pm \sqrt{S_2 N_1^2 N_2^2 I_1^2 (S_2 + S_1)}}{S_2 N_2} =$$

$$= \mp N_1 I_1 \pm \frac{N_1 N_2 I_1}{S_2 N_2} \sqrt{S_2 (S_2 + S_1)} =$$

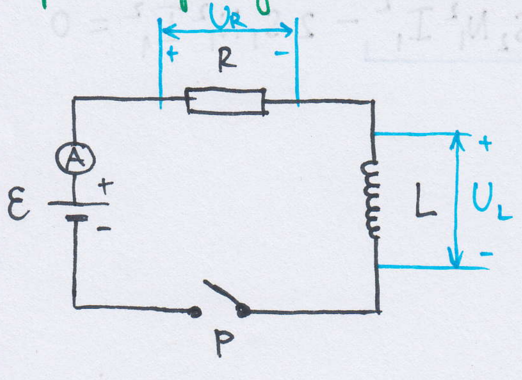
$$= \mp N_1 I_1 \pm \frac{N_1 I_1}{S_2} S_2 \sqrt{1 + \frac{S_1}{S_2}} =$$

$$= N_1 I_1 \left(\mp 1 \pm \sqrt{1 + \frac{S_1}{S_2}} \right) =$$

$$= \frac{L_1}{2\sqrt{\pi S_1}} I_1 \left(\mp 1 \pm \sqrt{1 + \frac{S_1}{S_2}} \right)$$

$$\boxed{I_2 = \frac{L_1 I_1}{2\sqrt{\pi S_1}} \left(\mp 1 \pm \sqrt{1 + \frac{S_1}{S_2}} \right)}$$

85. У тренутку $t=0$ затворен је прекидач P у колу са слике. Описати процес нарастања струје i у колу за $t>0$. Колика је струја после времена t од затварања прекидача ако знамо ε, R и L?



$t=0 \quad i=0$

$$\underbrace{t>0}_{\text{прекидач се затвара,}}$$ расте струја од 0 до максималне вредности (није константна док не постигне макс. $\Rightarrow$ променљиво МП $\Rightarrow$ самоиндукција због промене флукса)

$$\mathcal{E}_{SI} = -\frac{d\phi}{dt}$$

$$\phi = Li$$

$$\mathcal{E}_{SI} = -L\frac{di}{dt}$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_{SI} = iR$$

$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = iR$$

$$\mathcal{E} = iR + L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{L} = \frac{R}{L}i + \frac{di}{dt}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i = \frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{\frac{1}{L}(\mathcal{E} - Ri)} = dt$$

$$\frac{di}{\mathcal{E} - Ri} = \frac{dt}{L}$$

$$\frac{-R\,di}{\mathcal{E} - Ri} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\frac{d(-Ri)}{\mathcal{E} - Ri} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\frac{d(\mathcal{E} - Ri)}{\mathcal{E} - Ri} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\int\frac{d(\mathcal{E} - Ri)}{\mathcal{E} - Ri} = -\frac{R}{L}\int dt$$

$$\ln(\mathcal{E}-Ri) = -\frac{R}{L}t + \ln c$$

$$\ln\frac{\mathcal{E}-Ri}{c} = -\frac{R}{L}t \quad \Big/ e^x$$

$$\frac{\mathcal{E}-Ri}{c} = e^{-Rt/L}$$

$$\mathcal{E}-Ri = c\,e^{-Rt/L}$$

$$\left[\text{П.У.:}\quad t=0 \quad i=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\mathcal{E}-0 &= c\cdot 1\\ c &= \mathcal{E}\end{aligned}\right]$$

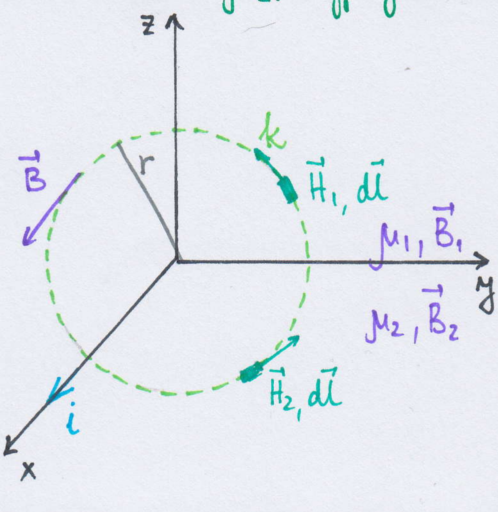
$$\mathcal{E}-Ri = \mathcal{E}\,e^{-Rt/L}$$

$$Ri = \mathcal{E}-\mathcal{E}e^{-Rt/L} = $$

$$= \mathcal{E}(1-e^{-Rt/L})$$

$$\boxed{i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)}$$

86. Дуж x-осе постављен је проводник са струјом јачине i. Полупростор $z>0$ испуњен је хомогеним непроводним магнетиком магнетне пермеабилности μ_1, док је у делу простора $z<0$ хомогени непроводни магнетик магнетне пермеабилности μ_2. Одредити магнетну индукцију у целом простору.



$$\oint_K H_s \, dS = \int_{z>0} H_1 \, dl + \int_{z<0} H_2 \, dl = i$$

$$\vec{H}_1, \vec{H}_2 \parallel \vec{dl} \Rightarrow \vec{H}_1 \cdot \vec{dl} = H_1 \, dl \wedge \vec{H}_2 \cdot \vec{dl} = H_2 \, dl$$

$$H_1 \int_{z>0} dl + H_2 \int_{z<0} dl = i$$

$$H_1 \, r\pi + H_2 \, r\pi = i$$

$$H_1 + H_2 = \frac{i}{r\pi}$$

$$\frac{B_1}{\mu_0 \mu_1} + \frac{B_2}{\mu_0 \mu_2} = \frac{i}{r\pi}$$

$$\frac{B_1}{\mu_1} + \frac{B_2}{\mu_2} = \frac{\mu_0 i}{r\pi}$$

ГРАНИЧНИ УСЛОВ НА РАВНИ $z=0$

$$B_{1\tau} = 0 \qquad B_{2\tau} = 0$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$B_1 = B_{1n} \qquad B_2 = B_{2n}$$

$$B_1 = B_2 = B$$

$$\frac{B}{\mu_1} + \frac{B}{\mu_2} = \frac{\mu_0 i}{r\pi}$$

$$B\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right) = \frac{\mu_0 i}{r\pi}$$

$$\frac{1}{\mu_e} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$$

$$\frac{B}{\mu_e} = \frac{\mu_0 i}{r\pi}$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_e \mu_0 i}{r\pi}}$$